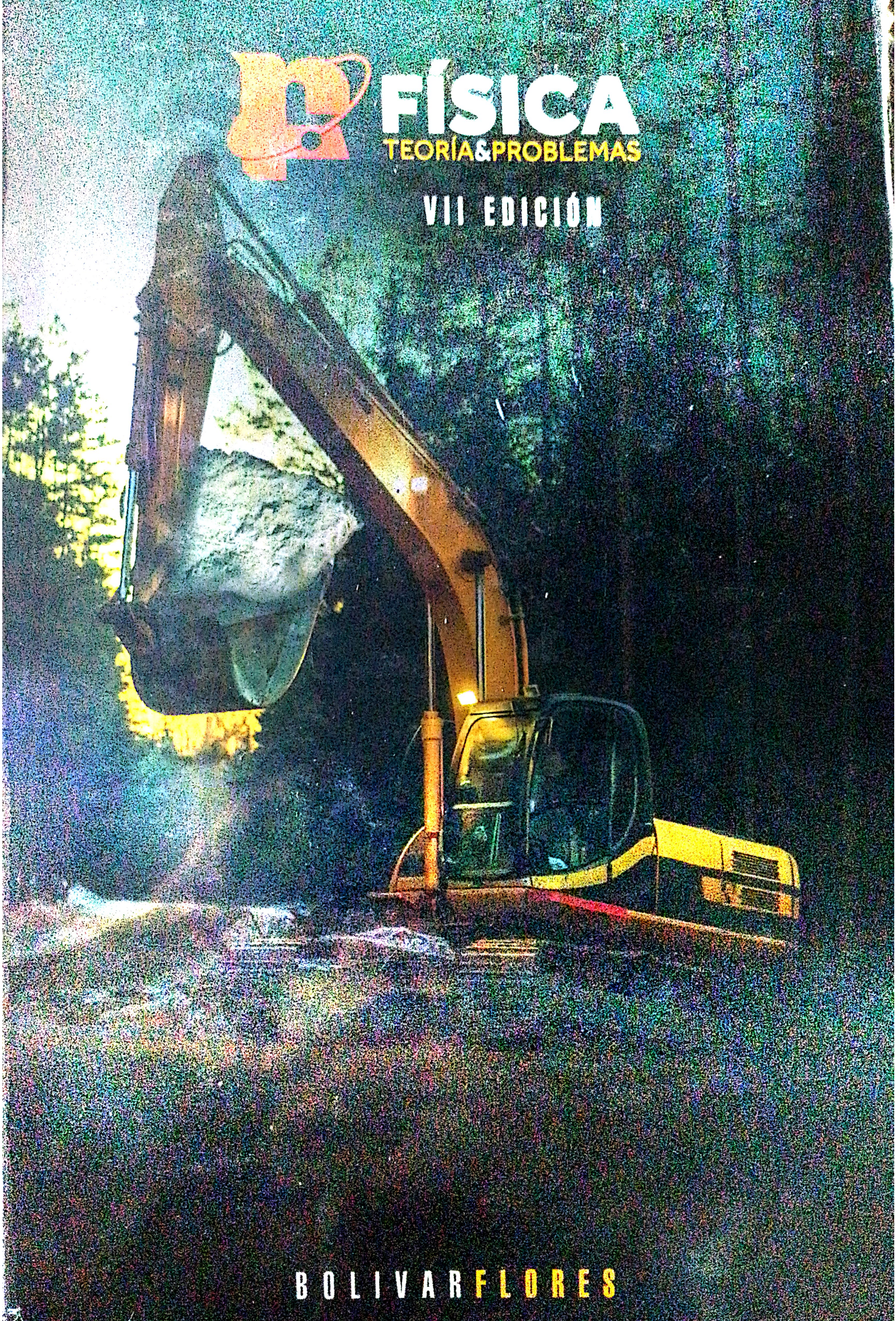
FÍSICA

TEORÍA&PROBLEMAS

VII EDICIÓN



BOLIVAR FLORES

FÍSICA
TEORÍA&PROBLEMAS

PRÓLOGO E INDICE

FÍSICA
TEORÍA&PROBLEMAS

VII Edición

BOLÍVAR CIRILO FLORES NICOLALDE

Profesor Titular del Departamento de Física en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica del Litoral.

Septima edición.

septiembre, 2023.

Guayaquil – Ecuador

Queda prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, ya sea electrónico o mecánico, sin la autorización previa y por escrito del autor.

Impreso por: Bolivar Flores Nicolalde

ISBN: 978-9942-915-33-7

Dirección Nacional de Derecho de Autor y Derechos Conexos IEPI

Certificado N0. GYE - 009213

C•BRANDING
PROYECTOS COMUNICACIONALES

Responsable por: Diseño, diagramación e illustración.

JUAN CARLOS GÓMEZ GONZALEZ - carlosgomezg90@gmail.com

AGRADECIMIENTO

BOLÍVAR CIRILO FLORES NICOLALDE

Agradezco en especial a mi querida familia quienes en todo momento fueron mi apoyo y mi fuente de inspiración para culminar con éxito, la septima edición de este libro.

También deseo expresar mi sincero agradecimiento a mis estimados colegas, quienes con su profesionalismo, esfuerzo, dedicación y amabilidad, colaboraron como revisores contribuyendo así en la mejora y culminación exitosa de la septima edición de la presente obra académica.

CAPÍTULO 1. SISTEMAS DE UNIDADES

1.1	MEDICIÓN	3
1.2	MAGNITUDES FUNDAMENTALES, DERIVADAS Y SUPLEMENTARIAS	3
1.3	MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN EL SI	3
1.4	MAGNITUDES SUPLEMENTARIAS EN EL SI	4
1.5	MAGNITUDES DERIVADAS EN EL SI	4
1.6	SISTEMA BRITÁNICO DE UNIDADES (UNIDADES IMPORTANTES)	4
1.7	ANÁLISIS DIMENSIONAL	5
1.8	PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD	5
1.9	RELACIÓN ENTRE UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL SI CON OTROS SISTEMAS DE UNIDADES	6
1.10	NOTACIÓN CIENTÍFICA	6
1.11	PREFIJOS	7
1.12	TABLA DE PREFIJOS	7
1.13	REGLAS DE REDONDEO	8
1.14	CIFRAS SIGNIFICATIVAS	10
1.15	ERROR ABSOLUTO O INCERTIDUMBRE ABSOLUTA	10
1.16	DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS	10
1.17	OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS	12
1.17.1	SUMA Y RESTA	12
1.17.2	MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN	12
1.18	ERROR O INCERTIDUMBRE RELATIVA	13
1.19	ORDEN DE MAGNITUD	14
ACTIVIDADES ADICIONALES		15
	PROBLEMAS PROPUESTOS	25

CAPÍTULO 2. VECTORES

2.1	CANTIDADES ESCALARES	33
2.2	CANTIDADES VECTORIALES	33
2.3	REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y NOMENCLATURA DE UN VECTOR	33
2.3.1	MAGNITUD DE UN VECTOR	34
2.3.2	FORMAS DE EXPRESAR UN VECTOR	34
2.4	OPERACIONES CON VECTORES	34
2.4.1	MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR	34
2.4.2	SUMA DE VECTORES POR MÉTODOS GRÁFICOS	35
2.5	EL VECTOR NEGATIVO	37
2.6	VECTORES COLINEALES	37

2.7 COMPONENTES DE UN VECTOR 38
2.8 SUMA DE VECTORES POR EL MÉTODO DE LAS COMPONENTES RECTANGULARES 39
2.9 LEY DEL COSENO APLICADA A LA SUMA DE VECTORES 40
2.10 LEY DEL SENO 42
2.11 RESTA DE VECTORES 43
2.12 VECTORES UNITARIOS ORTOGONALES EN TRES DIMENSIONES 44
2.13 REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR EN TRES DIMENSIONES 44
2.14 MAGNITUD DE UN VECTOR EN TRES DIMENSIONES 44
2.15 VECTOR UNITARIO EN 3 DIMENSIONES 45
2.16 SUMA DE VECTORES EN 3 DIMENSIONES 46
2.17 PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO ENTRE VECTORES 47
2.17.1 PRODUCTO PUNTO DE VECTORES UNITARIOS ($\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$) 47
2.17.2 PRODUCTO ESCALAR O PUNTO ENTRE LOS VECTORES A Y B 48
2.18 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR 50
2.18.1 PROYECCIÓN ESCALAR DE UN VECTOR SOBRE OTRO 50
2.19 PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ DE VECTORES 52
2.20 PRODUCTO TRIPLE ESCALAR 53
2.21 COSENOS DIRECTORES 55
ACTIVIDADES ADICIONALES 57
PROBLEMAS PROPUESTOS 71

CAPÍTULO 3. CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

3.1 DESPLAZAMIENTO 81
3.2 RAPIDEZ MEDIA 82
3.3 VELOCIDAD MEDIA 82
3.4 VELOCIDAD INSTANTÁNEA 83
3.5 ACELERACIÓN 84
3.6 CAÍDA LIBRE 88
3.7 GRÁFICOS EN LA FÍSICA 92
3.8 GRÁFICO POSICIÓN VS TIEMPO 93
3.9 GRÁFICO VELOCIDAD VS TIEMPO 97
3.10 GRÁFICO ACELERACIÓN VS TIEMPO 102
3.11 MOVIMIENTO RECTILINEO CON ACELERACIÓN VARIABLE USANDO DERIVADAS E INTEGRALES 104
3.11.1 CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN CON ACELERACIÓN CONSTANTE 105
3.11.2 REGLA DE LA CADENA APLICADA A LA CINEMÁTICA 105
ACTIVIDADES ADICIONALES 111
PROBLEMAS PROPUESTOS 131

CAPÍTULO 4. CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

4.1 MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES 137

4.2 ECUACIONES A UTILIZARSE 137
4.2.1 DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA 138
4.2.2 CÁLCULO DEL ALCANCE HORIZONTAL 138
4.2.3 EJERCICIO DE APLICACIÓN 139
4.3 MOVIMIENTO CIRCULAR 141
4.3.1 DESPLAZAMIENTO ANGULAR
4.4 RAPIDEZ ANGULAR MEDIA 142
4.5 VELOCIDADES ANGULARES MEDIAS E INSTANTÁNEAS 143
4.6 PARÁMETROS QUE AYUDAN A DESCRIBIR EL MOVIMIENTO CIRCULAR 144
4.6.1 PERÍODO 144
4.6.2 FRECUENCIA 144
4.6.3 RELACIÓN ENTRE PERÍODO, FRECUENCIA Y RAPIDEZ ANGULAR 144
4.7 ACELERACIÓN CENTRÍPETA 144
4.8 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME 145
4.9 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO 146
4.9.1 ACELERACIÓN ANGULAR 146
4.10 VELOCIDAD RELATIVA 147
4.10.1 ACELERACIÓN RELATIVA 147
ACTIVIDADES ADICIONALES 149
PROBLEMAS PROPUESTOS 167

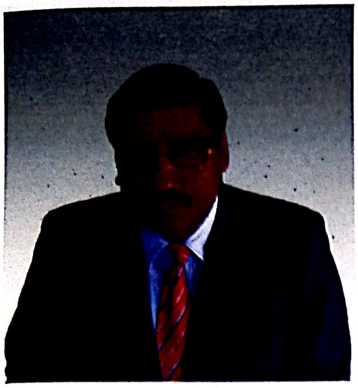
CAPÍTULO 5. DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

5.1 CONCEPTO DE FUERZA 174
5.1.1 FUERZA NETA 174
5.1.2 PRIMERA LEY DE NEWTON 175
5.2 INERCIA 175
5.3 SISTEMAS DE REFERENCIA 176
5.4 SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL Y NO INERCIAL 176
5.5 MASA 177
5.6 SEGUNDA LEY DE NEWTON 180
5.7 TERCERA LEY DE NEWTON 181
5.8 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE 182
5.9 FUERZAS DE FRICCIÓN 189
5.10 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME 193
5.11 ACELERACIÓN CENTRÍPETA 194
5.12 FUERZA CENTRÍPETA 196
5.13 PERALTE EN LAS CURVAS 197
5.14 MOVIMIENTO CIRCULAR VERTICAL 198
ACTIVIDADES ADICIONALES 201
PROBLEMAS PROPUESTOS 219

CAPÍTULO 6. TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA

6.1 TRABAJO Y ENERGÍA 229

6.2 TRABAJO NETO O TRABAJO TOTAL 231
6.3 POTENCIA 232
6.4 TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE 233
6.5 TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE 233
6.6 LEY DE HOOKE 234
6.7 FUERZA VARIABLE EXPERIMENTADA POR UN RESORTE 235
6.8 GRÁFICO FUERZA VERSUS DESPLAZAMIENTO PARA UNA FUERZA VARIABLE QUE EXPERIMENTA UN RESORTE 235
6.8.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA SOBRE UN RESORTE 235
6.9 TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA 236
6.10 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL 238
6.10.1 EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA GRAVITACIONAL EN FUNCIÓN DE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL 238
6.10.2 EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA ELÁSTICA EN FUNCIÓN DE LA ENERGÍA ELÁSTICA 239
6.11 FUERZAS CONSERVATIVAS 239
6.12 FUERZAS NO CONSERVATIVAS 239
6.13 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA 240
6.14 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA PARA SISTEMAS CON FUERZAS NO CONSERVATIVAS 241
ACTIVIDADES ADICIONALES 243
PROBLEMAS PROPUESTOS 257
RESPUESTAS 261



ACERCA DEL AUTOR

Bolívar C. Flores Nicolalde, es profesor Titular de la Escuela Superior Politécnica del Litoral en el Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas. Realizó sus estudios en la Escuela Superior Politécnica del Litoral donde obtuvo el título de Ingeniero Mecánico y su postgrado en Enseñanza de la Física obteniendo el grado de Magister. Como méritos académicos recibió el Diploma de Honor al Mérito Docente por haber obtenido altas calificaciones en sus labores docentes en los años 2010 y 2011.

Presentó trabajos científicos-educativos en la Décima Conferencia Interamericana de Educación en Física, organizado por la Universidad de Antioquia en Colombia en el año 2009; así como también en el Primer Congreso Binacional de Investigación en Ciencia y Tecnología de las Universidades del Norte del Perú y Sur del Ecuador, realizado en Piura - Perú en el año 2011. Presentó trabajos en "INTERNATIONAL CONFERENCE OF PHYSICS EDUCATION" en México-ICPE 2011. Ha publicado los siguientes trabajos en el campo de la Física Educativa:

- "The effects of the application of cognitive strategies for problem solving and the implementation of Gowin's V in electric field point charges" en Latin American Journal in Physics Education Volumen 6, Agosto del 2012.

- "Influencia de la aplicación de la teoría del aprendizaje de Robert Gagné en el rendimiento académico, en el estudio del experimento de Oersted", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Las historias digitales aplicadas en el aprendizaje de las ecuaciones del movimiento rectilíneo en una dimensión", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Influencia de los hábitos de estudio en el rendimiento académico de los estudiantes de una institución de educación media Ecuatoriana", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Influencia de la estrategia de resolución de problemas en el rendimiento de los estudiantes de bachillerato, en el estudio de la unidad de campo eléctrico", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Las redes sociales, su influencia e incidencia en el rendimiento académico de los estudiantes de una entidad Educativa Ecuatoriana en las asignaturas de Física y Matemática", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Predicción del rendimiento académico de los estudiantes de Física a través de las redes Bayesianas en la unidad de cantidad de movimiento lineal", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

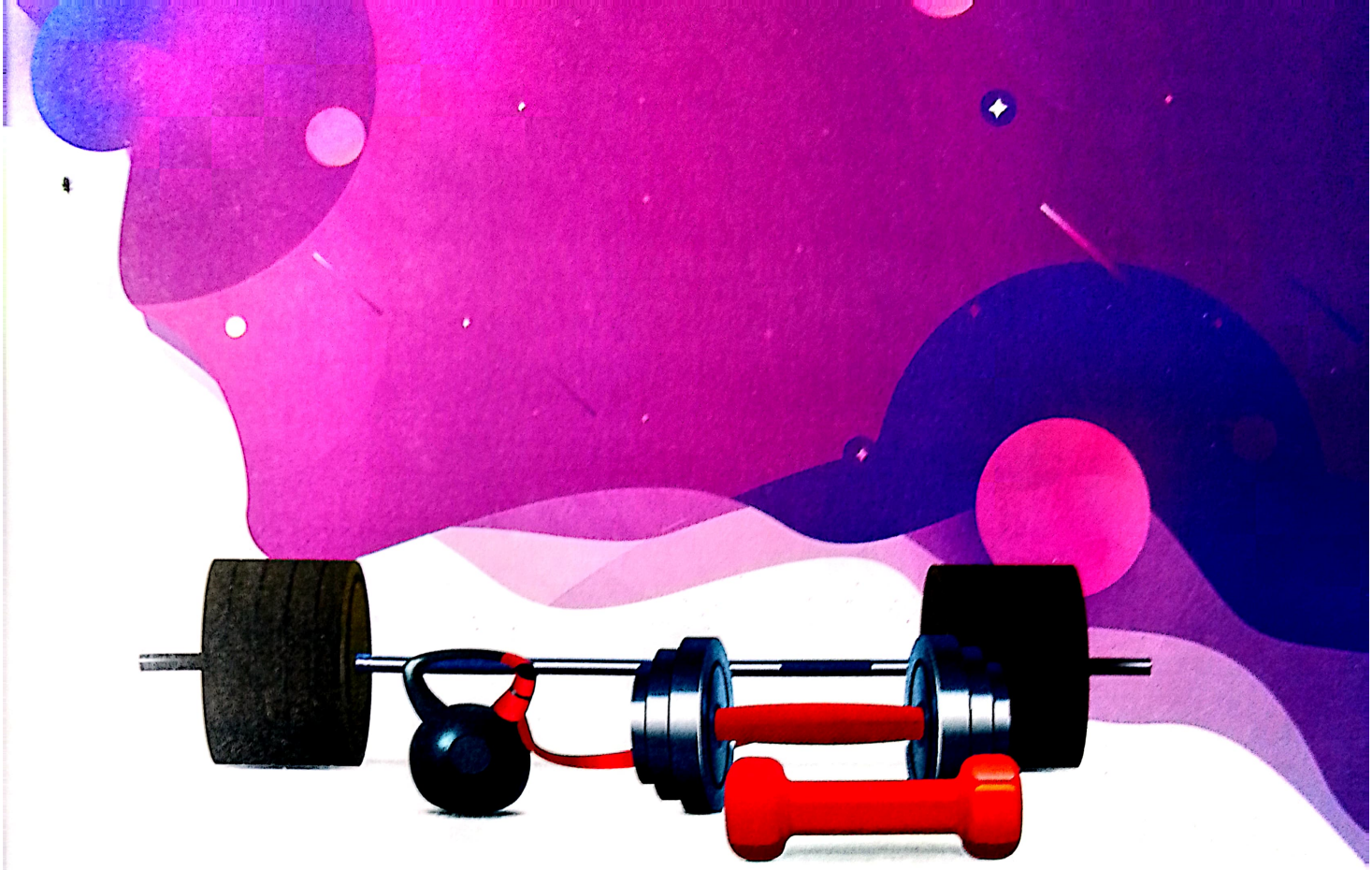
- "Modelación matemática de la propagación de calor con el uso de las ecuaciones diferenciales parciales y diferencias finitas", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Diagnóstico de la metacognición y procesos de aprendizaje de los estudiantes que estudian Física en una Universidad Ecuatoriana", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

- "Análisis descriptivo de las dificultades que afrontan estudiantes de ingeniería en el aprendizaje de Física de una Universidad Ecuatoriana", publicado en LATIN-AMERICAN JOURNAL OF PHYSICS (LAJPE), issn: 1870-9095, año 2016.

Decidí escribir este libro conociendo que el estudio de las ciencias en general, y la Física en particular, requiere un texto en el que los alumnos desarrollen habilidades de aprendizaje significativo y resolución de problemas que les permitan rendir y aprobar los exámenes de exoneración o ingreso en las distintas Universidades y Escuelas Politécnicas a Nivel Nacional e Internacional.

FÍSICA
TEORÍA&PROBLEMAS



1 | SISTEMA DE UNIDADES

La Física es una ciencia teórica y experimental que estudia los fenómenos de la naturaleza. Todos los fenómenos que vivimos y experimentamos cotidianamente pueden ser estudiados por esta ciencia: la naturaleza, el cosmos, el movimiento de los cuerpos, el movimiento ondulatorio, los fluidos, temperatura, calor, los fenómenos ópticos, los fenómenos electromagnéticos, etc.

La Física se relaciona con la Química, la Biología y otras ciencias. Tiene una relación muy estrecha con la tecnología y desde luego con lo más preciado para los seres vivos, la vida. Como la Física es una ciencia teórica y experimental, en ella se hacen observaciones y se realizan experimentos, los cuales involucran las mediciones.

Los físicos se ocupan de estudiar desde el fenómeno más sencillo hasta buscar la explicación al origen del universo, los universos paralelos, la materia oscura, los agujeros negros, los fenómenos cuánticos y relativistas, la teoría de las cuerdas, las galaxias, la nanociencia, la nanotecnología, etc. Como una herramienta importante para el estudio de esta ciencia empezaremos aprendiendo los estándares de medidas y las mediciones.

1 | SISTEMA DE UNIDADES

1.1 MEDICIÓN

En Física, medición es un proceso de comparación de lo que se desea medir con un elemento llamado patrón de medida, que puede ser patrón de longitud, de masa, de tiempo, etc. Estos patrones de medida, como por ejemplo: el de longitud, podrían ser distintos dependiendo de cada país; pero en el año de 1960 en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas se acordó estandarizar los sistemas de unidades adoptándose el llamado **SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (*SI*)**. Desde ese entonces la mayoría de los países han adoptado el S.I, pero en la actualidad una minoría todavía mantiene paralelamente su propio sistema de unidades, debido al costo que representaría el cambio al S.I y por otros motivos propios de cada país. En Ecuador se adoptó el Sistema Internacional de Unidades en gran porcentaje como una disposición nacional, cumpliendo las exigencias internacionales desde el 9 de Enero de 1974, donde nuestro país adoptó este sistema mediante la ley N° 1456 de pesas y medidas, promulgada en el registro oficial N° 468, pero todavía existe una pequeña cantidad de locales que usan unidades en otros sistemas, como por ejemplo: la libra. Las personas se dirigen hacia las tiendas y adquieren productos por libras, pero esto sucede en tiendas pequeñas; los grandes supermercados se ajustan a las normas nacionales e internacionales y se venden los productos en kilogramos. En nuestro país es común comprar arroz, azúcar, etc., en tiendas por libras, pero en los supermercados ya está marcado su contenido en kilogramos. En Física existen las magnitudes clasificadas por su origen y por su naturaleza; por su origen se tienen las magnitudes fundamentales y derivadas; por su naturaleza las escalares y las vectoriales.

1.2 MAGNITUDES FUNDAMENTALES, DERIVADAS Y SUPLEMENTARIAS

Entiéndase por magnitudes fundamentales aquellas que son principales, que no dependen de otras. Las magnitudes derivadas son aquellas que dependen de las magnitudes fundamentales, y resultan de la combinación de ellas. Existen una serie de sistemas de unidades, tales como: internacional, métrico gravitacional, CGS, inglés, inglés gravitacional, etc. Cada sistema posee sus propias cantidades fundamentales y derivadas, por ejemplo: el Sistema Internacional cuenta con siete magnitudes fundamentales, dos suplementarias y un sinnúmero de magnitudes derivadas. Las magnitudes fundamentales en el S.I son: longitud, masa, tiempo, intensidad de corriente eléctrica, temperatura, intensidad luminosa y cantidad de sustancia. La longitud está medida en metros (m), la masa en kilogramos (kg), el tiempo en segundos (s), la intensidad de corriente en ampere (A), la temperatura en kelvin (K), la intensidad luminosa en candela (cd) y la cantidad de sustancia en (mol). Ver tabla 1.1

1.3 MAGNITUDES FUNDAMENTALES EN EL SI.

MAGNITUD FUNDAMENTAL	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensidad luminosa	candela	cd
Cantidad de sustancia	mol	mol

Tabla 1.1

En la Tabla 1.1 se puede observar las siete magnitudes fundamentales en el sistema internacional de unidades.

1.4 MAGNITUDES SUPLEMENTARIAS EN EL SI.

Las magnitudes suplementarias son el Radián (rad) y el Estereorradián (sr). Ver tabla 1.2

MAGNITUD SUPLEMENTARIA	UNIDAD	SÍMBOLO
Unidad de ángulo plano	Radián	*rad*
Unidad del ángulo sólido	Estereorradián	*sr*

Tabla 1.2

1.5 MAGNITUDES DERIVADAS EN EL SI.

Las magnitudes derivadas son múltiples y resultan de la combinación de las magnitudes fundamentales y/o suplementarias y a continuación citaremos algunas de estas magnitudes. En Física es muy común hablar de velocidad, aceleración, fuerza, intensidad de campo eléctrico, calor, energía, trabajo, área, volumen, potencia, caudal, presión, etc; las cantidades nombradas anteriormente son una parte de las cantidades derivadas. Como ejemplo se tiene que la velocidad es la relación entre el desplazamiento $(\vec{\Delta r})$ y el tiempo $[t]$. La magnitud del desplazamiento viene expresada en metros $[m]$, que corresponde a la unidad de la magnitud fundamental de longitud. El tiempo es una magnitud fundamental cuya unidad es el segundo $[s]$. Las unidades de la velocidad serán la combinación de las unidades de las dos cantidades fundamentales que son la longitud y el tiempo, por lo tanto, las unidades de la velocidad serán, metro sobre segundo, $[m/s]$. A continuación se presenta una lista de una parte de estas magnitudes derivadas y sus unidades correspondientes. Ver Tabla 1.3

MAGNITUD DERIVADA	UNIDAD	SIMBOLO
Velocidad	*metro /segundo*	m/s
Aceleración	*metro/segundo²*	m/s^2
Fuerza	*Newton*	$N = kg.m/s^2$
Intensidad de campo eléctrico	*Newton/Coulomb*	N/C
Energía , Trabajo, Calor	*Joule*	$J = kg\ .\ m^2/s^2$
Unidad de superficie	*metro cuadrado*	m^2
Unidad de Volumen	*metro cúbico*	m^3
Potencia	*Vatio*	W
Ímpetu o cantidad de movimiento	*Newton . segundo*	$N.s = kg\ .\ m/s$
Velocidad angular	*Radián/segundo*	$rad/s = 1/s$
Presión	*Pascal*	$Pa = N/m^2 = kg/(s^2.m)$
Entropía	*Joule/kelvin*	$J/K=(m^2.kg)/(s^2.K)$

3 x 3

Tabla 1.3

1.6 SISTEMA BRITÁNICO DE UNIDADES (UNIDADES IMPORTANTES)

MAGNITUD	UNIDAD	SÍMBOLO
Longitud	Pie	*pie*
Masa	Libra	*lb*
Tiempo	Segundo	*s*
Fuerza	Poundal	*pdl*
Trabajo	Poundal - Pie	*pdl.pie*

Tabla 1.4

1.7 ANÁLISIS DIMENSIONAL

El análisis dimensional nos permite relacionar las magnitudes derivadas con las fundamentales, verificar la veracidad de las fórmulas y hallar las fórmulas a partir de datos experimentales. En Física las magnitudes fundamentales tienen su propia dimensión que se muestran a continuación. Ver Tabla 1.5

MAGNITUD FUNDAMENTAL	UNIDAD	SÍMBOLO	DIMENSIÓN
Longitud	metro	m	$[L]$
Masa	kilogramo	kg	$[M]$
Tiempo	segundo	s	$[T]$
Intensidad de corriente	ampere	A	$[I]$
Temperatura	kelvin	K	$[\theta]$
Intensidad luminosa	candela	cd	$[J]$
Cantidad de sustancia	mol	mol	$[N]$

Tabla 1.5

Así, la dimensión de la longitud se representa por $[L]$ y para representar la velocidad que es una magnitud derivada se usa la dimensión de la longitud dividida para la dimensión del tiempo $[V] = \frac{[L]}{[T]}$. De la misma manera puede hallarse las dimensiones de la aceleración como las dimensiones de la velocidad $[V] = \frac{[L]}{[T]}$, dividida para la dimensión del tiempo $[T]$.

$$[a] = \frac{\frac{[L]}{[T]}}{[T]} = \frac{[L]}{[T^2]} = [L]\,[T^{-2}]$$

Ejemplo 1.1 - Determine la ecuación dimensional de la fuerza. La fuerza es una magnitud derivada que es igual al producto de la masa por la aceleración.

Solución: La ecuación dimensional de la fuerza será la ecuación dimensional de la aceleración $[L][T^{-2}]$, multiplicada por la dimensión de la masa $[M]$, por lo tanto la ecuación dimensional de la fuerza es $[L][T^{-2}][M]$.

Ejemplo 1.2 - Determine la ecuación dimensional del trabajo o la energía. El trabajo es una magnitud derivada que es la fuerza multiplicada por la distancia.

Solución: La ecuación dimensional del trabajo será la ecuación dimensional de la fuerza $[L][T^{-2}][M]$, multiplicada por la dimensión de la distancia $[L]$, por lo tanto la ecuación dimensional del trabajo es $[L^2][T^{-2}][M]$.

1.8 PRINCIPIO DE HOMOGENEIDAD

Si se suman o restan términos de una ecuación, estos términos deben tener la misma dimensión. En la ecuación del desplazamiento para el movimiento rectilíneo uniformemente variado $\Delta x = v_0\, t + \frac{1}{2}\, at^2$, sabemos que la dimensión del desplazamiento $[\Delta x]$ es $[L]$, por lo tanto todos los términos de la ecuación del desplazamiento deben tener la misma dimensión. **Los términos son:** $[\Delta x]$, $[v_0\, t]$, $\left[\frac{1}{2}\, at^2\right]$ **según el principio de homogeneidad, la dimensión de cada uno de estos términos es [L].**

$$[L] = [\Delta x] \qquad [L] = [v_0\, t] \qquad [L] = \left[\frac{1}{2}\, at^2\right]$$

Los factores que son valores numéricos que aparecen en las ecuaciones como $\frac{1}{2}$, no tienen dimensiones.

La dimensión del término $[v_0\, t]$: $[v_0\, t] = [v_0][t]$ $[v_0][t] = [LT^{-1}][T]$ $[LT^{-1}][T] = [L]$

La dimensión del término $\left[\frac{1}{2}\, at^2\right]$: $\left[\frac{1}{2}\, at^2\right] = \left[\frac{1}{2}\right][a]\,[t^2]$ $\left[\frac{1}{2}\, at^2\right] = [L][T^{-2}][T^2]$ $[L][T^{-2}][T^2] = [L]$

Todos los términos tienen la misma dimensión $[L]$.

Ejemplo 1.3 - En la siguiente ecuación la velocidad es $v = A + Bt$. Determinar las dimensiones de A y B.

Solución: Según el principio de homogeneidad, las dimensiones de cada término deben ser las mismas. $[v]=[A]=[Bt]$. Como las dimensiones de la velocidad son $[v] = [LT^{-1}]$, entonces las dimensiones de A deben ser también $[A] = [LT^{-1}]$. Las dimensiones de $[Bt]$ son las mismas que la velocidad $[LT^{-1}]$

$$[Bt] = [B][t] \qquad [B][t] = [LT^{-1}]$$

Las dimensión de t es $[t] = [T]$, despejando las dimensiones de B se tiene: $[B][T] = [LT^{-1}] \rightarrow [B] = \frac{[LT^{-1}]}{[T]} = [LT^{-2}]$

1.9 RELACIÓN ENTRE LAS UNIDADES DEL SISTEMA INTERNACIONAL CON OTROS SISTEMAS DE UNIDADES

$1\ km = 1000\ m$	$1\ pie = 12\ pulgadas$
$1\ m = 3.28\ pies$	$1\ pulgada = 2.54\ cm = 0.0254\ m$
$1\ milla\ terrestre = 1609\ m$	$1\ yarda = 3\ pies = 36\ pulgadas = 91.4\ cm$
$1\ kg = 1000\ g = 2.2\ lb$	$1\ lb = 16\ onzas = 454\ g$
$1\ Tonelada = 1000\ kg$	$1m^3 = 1000\ l$ | $1\ cm^3 = 1ml$
$1\ día = 24\ horas = 86400\ s$	$1\ hora = 60\ min = 3600\ s$
$1\ N = 0.102\ kgf$	$1\ kgf = 2.2\ lbf = 9.8\ N$
$1\ lbf = 32.2\ Poundal$	$1\ slug = 32.2\ lb$
$1\ N = 10^5\ dinas$	$1UTM = 9.8\ kg$

Tabla 1.6

Ejemplo 1.4 - Según la nueva ley de tránsito, los autos deben moverse a una rapidez máxima de $50.0\ km/h$ en la ciudad. Determine la rapidez en m/s.

Solución: $50.0\ \frac{km}{h} \times \frac{1000\ m}{1\ km} \times \frac{1h}{3600\ s} = 13.9\ \frac{m}{s}$

Ejemplo 1.5 - En los sacos de cemento viene impreso $50.0\ kg$. Determinar la masa en libra.

Solución: $50.0\ kg \times \frac{2.2\ lb}{1\ kg} = 110\ lb$

1.10 NOTACIÓN CIENTÍFICA

En ciencias existen cantidades muy grandes o muy pequeñas, como la velocidad de la luz, la distancia de la Tierra al Sol, el diámetro de un átomo, la carga y masa de un electrón, la masa de un neutrón, etc. Por lo tanto, conviene escribir estas cantidades en ***Notación Científica*** y expresar en función de potencias de **10**, con las siguientes recomendaciones: Se expresa la cantidad de la siguiente forma $A.BCD...\times 10^N$ donde A es un dígito del **1** al **9** que puede ir acompañado de otros dígitos BCD, N es un número entero que corresponde al exponente de **10** y representa el número de lugares que se traslada el punto decimal; si el punto decimal se traslada hacia la izquierda el exponente N es positivo y si el punto decimal se mueve hacia la derecha el exponente N es negativo.

Ejemplo 1.6 - La velocidad de la luz es de $300000000\ m/s$. Expresar esta velocidad en notación científica.

Solución: La velocidad de la luz es $300000000\ m/s$ como es una cantidad que está en enteros, se entiende que el punto decimal está al final y el punto decimal tiene que moverse ocho lugares a la izquierda, por lo tanto $N = +8$

El punto decimal se movió ocho lugares hacia la izquierda $3.0\times10^{8}\ m/s$.

Ejemplo 1.7 - La masa de un insecto es $0.0000125\ kg$. Expresar la masa en notación científica.

Solución: En este caso el punto decimal debe moverse 5 lugares hacia la derecha, por lo tanto N es negativo e igual, a - 5 y la masa queda expresada como $1.25\times10^{-5}\ kg$

1.11 PREFIJOS

Los prefijos se usan en los sistemas de unidades para expresar múltiplos de cantidades fundamentales o derivadas, y para esto se le agrega al símbolo de la magnitud física una letra acompañada al símbolo y sin espacio, como por ejemplo:

$$Em, Pm, Tm, Gm, Mm, \qquad km, hm, dam, dm, cm, mm$$

Si recordamos $1\ km = 1000\ m = 10^{+3}m$. El prefijo k se lee kilo y tiene un significado de 10^{+3}. De esta manera usted podrá observar la equivalencia de los prefijos con su valor correspondiente en potencias de diez.

Una parte de los prefijos se escriben con letras minúsculas, pero a partir de los mega se escriben con mayúsculas, como por ejemplo: 1 megámetro se escribe de la siguiente forma $1\ Mm = 1\times10^{+6}m$.

Es importante recalcar que el nombre se escribe con minúscula (*megámetro*).

1.12 TABLA DE PREFIJOS

A continuación se presenta en la tabla 1.7 los prefijos con su respectivo símbolos y valores.

NOMBRE	SÍMBOLO	VALOR	POTENCIA DE DIEZ
yotta	Y	1000000000000000000000000	10^{+24}
zetta	Z	1000000000000000000000	10^{+21}
exa	E	1000000000000000000	10^{+18}
peta	P	1000000000000000	10^{+15}
tera	T	1000000000000	10^{+12}
giga	G	1000000000	10^{+9}
mega	M	1000000	10^{+6}
kilo	k	1000	10^{+3}
hecto	h	100	10^{+2}
deca	da	10	10^{+1}
deci	d	0.1	10^{-1}
centi	c	0.01	10^{-2}
mili	m	0.001	10^{-3}
micro	μ	0.000001	10^{-6}
nano	n	0.000000001	10^{-9}
pico	p	0.000000000001	10^{-12}
femto	f	0.000000000000001	10^{-15}
atto	a	0.000000000000000001	10^{-18}
zepto	z	0.000000000000000000001	10^{-21}
yocto	y	0.000000000000000000000001	10^{-24}

Tabla 1.7

Ejemplo 1.8 - Si la distancia entre 2 ciudades es de 400000 m. Expresar esta distancia utilizando el prefijo $kilo$.

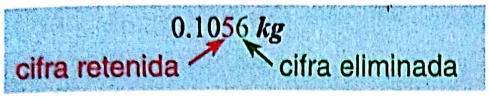
Solución: $400000\ m \times \frac{1km}{1000m} = 400\ km$

1.13 REGLAS DE REDONDEO

Si después de realizar las operaciones tenemos cantidades con muchos decimales, entonces es necesario realizar un proceso llamado redondeo que consiste en eliminar ciertos dígitos con los siguientes criterios:

1. **"Si la cifra a eliminarse es mayor que cinco, la cifra retenida aumenta en 1".**

   Ejemplo, redondear la siguiente cantidad 0.1056 kg a tres decimales.



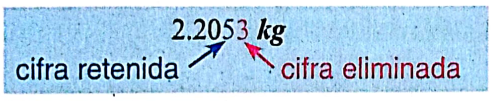
Como la cifra eliminada (6) es mayor que cinco, entonces, la cifra retenida (5) aumenta en 1. Por lo tanto queda **0.106 kg**.

Ejemplo 1.9 - Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) $1.056\ m \rightarrow 1.06\ m$ b) $2.0678\ s \rightarrow 2.07\ s$

2. **Si la cifra a eliminarse es menor que cinco, la cifra retenida no varía.**

   Ejemplo, redondear la siguiente cantidad 2.2053kg a tres decimales.



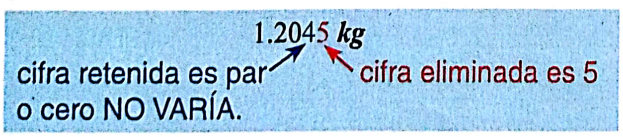
Como la cifra eliminada (3) es menor que cinco, entonces la cifra retenida (5), NO VARÍA. Por lo tanto, queda 2.205 kg.

Ejemplo 1.10 - Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) $3.054\ kg \rightarrow 3.05\ kg$ b) $1.062\ s \rightarrow 1.06\ s$

3. **Si la cifra a eliminarse es igual a cinco, seguida únicamente de ceros o sin ningún cero, la cifra retenida no varía cuando esta es par o cero y aumenta en 1 si es impar.**

Ejemplo 1.11 - Redondear la siguiente cantidad 1.2045 kg a tres decimales



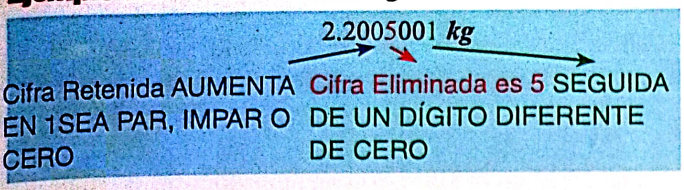
La cifra eliminada es igual a cinco y la cifra retenida es par (4). Por lo tanto, la cantidad final sería **1.204 kg**.

Ejemplo 1.12 - Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) $3.005\ kg \rightarrow 3.00\ kg$ b) $1.035\ s \rightarrow 1.04\ s$

4. **Si la cifra a eliminarse es IGUAL a cinco, seguida de algún dígito diferente de cero. La cifra retenida AUMENTA EN 1 sea par, impar o cero.**

Ejemplo 1.13 - Redondear la siguiente cantidad 2.2005001 kg a tres decimales



Solución: Como la cifra eliminada es igual a cinco, seguida de un dígito diferente de cero, entonces, la cifra retenida aumenta en 1 sea par, cero o impar, por lo tanto la medición queda en **2.201** kg.

Ejemplo 1.14 - Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) $1.005002\ kg \rightarrow 1.01\ kg$ b) $1.04503\ s \rightarrow 1.05\ s$

c) $5.2450001\ m \rightarrow 5.25\ m$ d) $10.335004\ N \rightarrow 10.34\ N$

Ejemplo 1.15 - Un auto se mueve a $35.5\ \frac{millas}{h}$. Expresar la rapidez en $\frac{m}{s}$, en notación científica y redondear a dos decimales.

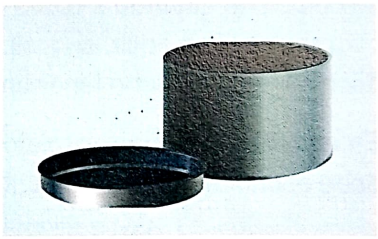
Solución:

$$\frac{35.5\ millas}{h} \times \frac{1609\ m}{1\ milla} \times \frac{1\ h}{3600\ s} = 15.866\ \frac{m}{s} = 1.59 \times 10^{+1}\ \frac{m}{s}$$

Ejemplo 1.16 - La densidad del acero es $7.8\frac{g}{cm^3}$. Expresar la densidad en $\frac{kg}{m^3}$, en notación científica y redondeando a dos decimales.

Solución:

$$7.8\frac{g}{cm^3} \times \frac{1kg}{1000\ g} \times \frac{(100\ cm)^3}{(1m)^3} = 7.80 \times 10^{+3}\ \frac{kg}{m^3}$$



Ejemplo 1.17 - ¿Cuántos segundos hay en un año?. Expresar en notación científica redondeando a cuatro decimales.

Solución:

$$1\ año \times \frac{365 días}{1 año} \times \frac{24\ horas}{1 día} \times \frac{3600\ s}{1 hora} = 3.1536 \times 10^{+7} s$$

Ejemplo 1.18 - Si la velocidad de la luz es de 300000 $\frac{km}{s}$, expresar la velocidad de la luz en $\frac{m}{s}$, en notación científica redondeando a un decimal.

Solución:

$$300000\ \frac{km}{s} \times \frac{1000\ m}{km} = 3.0 \times 10^{+8}\frac{m}{s}$$

Ejemplo 1.19 - ¿Cuál es la distancia expresada en ***metros*** que representa un año luz?
Nota: Expresar la respuesta en notación científica redondeando a 2 decimales.

Solución: Como un año luz es la distancia recorrida por la luz en un año, para calcular la distancia recorrida se usa:

$$d = v \times t = 3.0 \times 10^{+8}\ \frac{m}{\cancel{s}} \times \frac{1\ \cancel{año}}{1} \times \frac{365\ \cancel{días}}{1\ \cancel{año}} \times \frac{86400\ \cancel{s}}{1\ \cancel{días}} = 9.46 \times 10^{15}\ m$$

1 año luz = 9.46×10^{15} m

1.14 CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Las cifras significativas aparecen en todo proceso de mediciones. Están constituidas por cifras correctas y una cifra estimada o dudosa.

Así, por ejemplo, **cuando medimos** la longitud de una barra de aluminio con una regla graduada en metros, como se indica en la Figura 1.1, la longitud medida con este instrumento podría ser **2.6 *m***; **2.7 *m***; **2.6 *m***, etc.

Estas mediciones **2.6 *m***; **2.7 *m***; **2.6 *m***, todas tienen una cifra en común que es el **2**; esta cifra en la que todos están de acuerdo se llama **cifra correcta**, la cifra en la que no todos están de acuerdo como es **6**, **7**, **6** se llama cifra **dudosa o estimada. El conjunto de las dos cifras, las correctas y la dudosa es lo que se llama cifras significativas.**

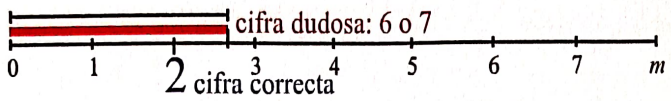


Figura 1.1

Si algún estudiante pregunta: ¿Cual es la medición correcta 2.6 *m* o 2.7*m*?. La respuesta es que las dos mediciones son correctas, porque en cada medición debe agregarse lo que llamaremos error absoluto δx. Como la medición para un estudiante puede ser 2.6 *m* y para otro 2.7 *m*, por lo tanto, hay que colocar en cada medición un intervalo de confianza llamado error o incertidumbre absoluta. Este error absoluto o incertidumbre se coloca de acuerdo a cómo está variando la cifra dudosa y es importante observar el orden numérico de la cifra dudosa, es decir, si la cifra dudosa está en enteros, el error absoluto debe ir en enteros, si está con un decimal, el error debe tener un decimal y así sucesivamente.

En este caso el error absoluto deber ser $\delta x = \pm 0.1\ m$ y la medición "x" puede ser 2.6 *m* o 2.7 *m*. La medición debe escribirse de las siguientes formas:

$$(x \pm \delta x) = (2.6 \pm 0.1)m \text{ ó } (2.7 \pm 0.1)m$$

1.15 ERROR ABSOLUTO O INCERTIDUMBRE ABSOLUTA

El error absoluto es un valor que da un intervalo de confianza donde probablemente se encuentra el valor medido, por ejemplo:

La siguiente medición realizada $(x \pm \delta x) = (2.6 \pm 0.1)cm$, el error absoluto $\pm$ 0.1, da un intervalo de confianza de $2.5cm$ hasta $2.7cm$, donde probablemente se encuentre la medición, como se puede observar en la Figura 1.2

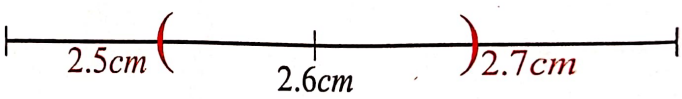


Figura 1.2

1.16 DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Como las cifras significativas aparecen en mediciones y estas son el conjunto de las cifras correctas y una dudosa o estimada, se procede a determinar el número de cifras significativas de una medición.

Aspectos importantes a considerar:

1. **Todo digito diferente de cero es significativo.**

Ejemplo 1.20 - La medición $(2.6 \pm 0.1)cm$ tiene dos cifras significativas, una correcta (2) y una dudosa (6).

2. **Los ceros que están a la izquierda, que solamente sirven para ubicar el punto decimal no cuentan como cifras significativas.**

Ejemplo 1.21 - En la siguiente medición $(0.00014 \pm 0.00001)m$. Indicar el número de cifras significativas.

De acuerdo a lo expuesto anteriormente, los ceros a la izquierda no son significativos; por lo tanto, la medición tendrá dos cifras significativas.

3. **Los ceros que están en medio de dígitos diferentes de cero son significativos.**

Ejemplo 1.22 - La medición $(207 \pm 1)\ kg$ tiene tres cifras significativas, dos correctas (20) y una dudosa (7).

4. **Los ceros que se encuentran a la derecha del punto decimal son cifras significativas.**

Ejemplo 1.23 - La medición $(3.00 \pm 0.01)\ s$ tiene tres cifras significativas, dos correctas (3.0) y una dudosa (0).

5. **Las potencias de 10, no se consideran cifras significativas.**

Ejemplo 1.24- En la siguiente medición $(1.1\times10^3)m$, indicar el número de cifras significativas.

Como las potencias de 10 no son cifras significativas, 10^3, ***no cuentan como cifras significativas***; por lo tanto, en la medición $(1.1\times10^3)m$, solo 1.1 *son cifras significativas*, es decir, la medición tiene dos cifras significativas.

6. **Cuando las mediciones son números enteros y terminan en ceros, estos ceros pueden o no ser cifras significativas.**

Ejemplo 1.25 - 1200 m puede tener 4, 3 o 2 cifras significativas.

$1.200 \times 10^3\ m$ tiene 4 cifras significativas

$1.20 \times 10^3\ m$ tiene 3 cifras significativas

$1.2 \times 10^3\ m$ tiene 2 cifras significativas

Cuando se tenga este caso y para evitar variedad en el número de cifras significativas se recomienda escribir la medición en notación cientifica. Así $1.200 \times 10^3\ m$ tiene 4 cifras significativas.

7. **En todo proceso de conversión de unidades, se debe mantener invariable el número de cifras significativas y para esto puede escribirse en notación científica.**

Ejemplo 1.26 - Expresar la siguiente medición 3.1 kg en g.

Para mantener el número de cifras significativas debe escribirse en notación científica y las potencias de 10 no cuentan como cifras significativas; por lo tanto, debe escribirse de la siguiente manera:

3.1 kg, *con dos cifras significativas, es equivalente a* $3.1 \times 10^3\ g$, *que también tiene dos cifras significativas.*

1.17 OPERACIONES CON CIFRAS SIGNIFICATIVAS

En las operaciones suma, resta, multiplicación y división con cifras significativas (mediciones) existen reglas a seguir para expresar el resultado. Para esto es necesario identificar el número de decimales o el número de cifras significativas de cada medición de acuerdo a la operación correspondiente a realizar.

Las reglas para las operaciones con cifras significativas se muestran a continuación 1.17.1 y 1.17.2.

1.17.1 SUMA Y RESTA

Para sumar y restar mediciones con cifras significativas, el resultado debe redondearse de acuerdo al orden numérico del término que tenga **menor número de decimales**. Se tienen las siguientes mediciones:

$$a = (15 \pm 1)m,\ b = (1.50 \pm 0.01)m \text{ y } c = (1.0 \pm 0.1)m$$

Ejemplo 1.27 - Hallar $a + b = ?$

$a = (15 \pm 1)m$, esta medición está en enteros, no tiene decimales.

$b = (1.50 \pm 0.01)m$, esta medición tiene centésimas, dos decimales.

$a + b = 16.50\ m$, este resultado debe redondearse al menor número de decimales, es decir, sólo a enteros. Aplicando las reglas de redondeo queda $a + b = 16\ m$.

Ejemplo 1.28 - Hallar $b - c = ?$

$b - c = 1.50 - 1.0 = 0.5$, el resultado ha sido redondeado a un decimal.

1.17.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Para multiplicar y dividir mediciones con cifras significativas, el resultado debe redondearse de acuerdo al término que tenga el **menor número de cifras significativas.**

Ejemplo 1.29 - Si se tienen las siguientes mediciones:

$$a = (21 \pm 1)cm,\ b = (2.03 \pm 0.01)cm$$

Si los lados de un rectángulo están dados por las mediciones a y b. Determinar el área del rectángulo en cm^2.

La medición $a = (21 \pm 1)cm$, tiene dos cifras significativas

La medición $b = (2.03 \pm 0.01)cm$, tiene tres cifras significativas

El área $a \times b = 21cm \times 2.03cm = 42.63\ cm^2$, tiene cuatro cifras significativas.

En esta operación a tiene el menor número de cifras significativas (2 cifras significativas); por lo tanto, el resultado $42.63\ cm^2$ debe redondearse a 2 cifras significativas, quedando $(42.63\ cm^2) = 43\ cm^2$

Los números que aparecen en fórmulas y que no son mediciones (π, 1/2, 1/3, etc), se consideran números exactos, es decir tienen infinito número de cifras significativas.

Ejemplo 1.30 - Para calcular el área de un triángulo se usa $Área = \frac{base \times altura}{2}$, el número 2, no es una medición, por lo tanto, tiene infinito número de cifras significativas.

Una placa triangular metálica tiene las dimensiones de base:

$b = (75.00 \pm 0.01)cm$ y altura $a = (4.0 \pm 0.1)cm$. Determine el área de la placa.

La base $b = (75.00 \pm 0.01)\ cm$ tiene 4 cifras significativas.

La altura $a = (4.0 \pm 0.1)\ cm$ tiene 2 cifras significativas.

Para calcular el área de un triángulo se usa la expresión $A = \frac{b \times a}{2}$

El número 2 que aparece en la fórmula no es una medición y tiene infinito número de cifras significativas.

El área es $A = \frac{b \times a}{2} = \frac{(75.00)cm \times (4.0)cm}{2} = 150\ cm^2$, pero el resultado debe redondearse al menor número de cifras significativas, que es 2.

Por lo tanto, el área debe escribirse en notación científica y luego redondearse a dos cifras significativas.

$$A = 150cm^2 = 1.50 \times 10^2\, cm^2 = 1.5 \times 10^2\, cm^2, \text{ dos cifras significativas.}$$

1.18 ERROR O INCERTIDUMBRE RELATIVA

El error relativo o incertidumbre relativa es la relación entre el error absoluto y la medición; es un parámetro adimensional, es decir, no tiene unidades. El error relativo también se puede expresar en forma porcentual y es lo que se llama error porcentual.

$$I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} \qquad I_{porcentual}\% = \frac{\delta x}{x} \times 100$$

El error relativo o porcentual es un parámetro indicativo de la precisión de la medición.

Ejemplo 1.31 - En la siguiente medición $(1.0 \pm 0.1)m$. Determine el error relativo y porcentual.

$$I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} = \frac{0.1}{1.0} = 0.1 \qquad I_{porcentual}\% = \frac{0.1}{1.0} \times 100 = 10\%$$

La medición más precisa es aquella que tenga el menor error relativo o porcentual.

Ejemplo 1.32 - De las siguientes mediciones. $(1.0 \pm 0.1)m$ y $(2.6 \pm 0.1)m$

Determine la medición más precisa.

$$I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} = \frac{0.1}{1.0} = 0.1 \qquad I_{relativa} = \frac{\delta x}{x} = \frac{0.1}{2.6} = 0.038$$

Por lo tanto, la medición más precisa es $(2.6 \pm 0.1)m$, porque es la que tiene menor error relativo.

1.19 ORDEN DE MAGNITUD

Es el valor aproximado correspondiente a la potencia de diez más cercana de una cantidad o medición dada. Por ejemplo el ancho de un celular es $6.0\ cm$ y si esta cantidad la comparamos con las potencias de diez entre las que está comprendida los $6.0\ cm$, es decir entre $10^0\ cm$ y $10^1\ cm$, lógicamente indicaremos que se encuentra más cerca de $10^1\ cm$, por lo tanto, el orden de magnitud (OM) del ancho del celular es $OM = 10^1\ cm$.

Es importante indicar que el término central entre 10^0 y 10^1 en potencias de diez no corresponde a un valor de 5 sino un valor (en potencias de diez) de $10^{0.5}$ que corresponde a $\sqrt{10}$.

10^0 $\quad$ $10^{0.5}$ $\quad$ 10^1

Valor central correspondiente a $\sqrt{10}$

Pasos para determinar el orden de magnitud de una cantidad. Para determinar el orden de magnitud se siguen los siguientes pasos:

1) Se escribe la cantidad en notación científica quedando de la siguiente forma: $A.BC\times10^N$

2) Si $A.BC \geq \sqrt{10}$, entonces, el orden de magnitud es $OM = 10^{(N+1)}$

3) Si $A.BC < \sqrt{10}$, entonces, el orden de magnitud es $OM = 10^N$

Ejemplo 1.33 - El largo de una carretera es $3100\ m$, determine el orden de magnitud de la longitud de la carretera.

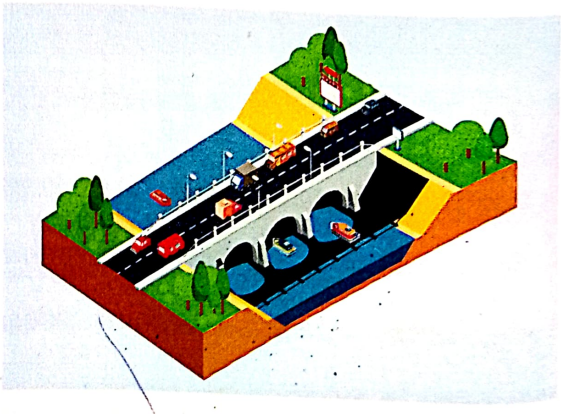
Es importante seguir los pasos indicados

1) Se escribe en notación científica $3.10\times10^3\ m$.

2) Luego se compara $3.10 < \sqrt{10}$.

3) El orden de magnitud es $OM = 10^3\ m$.

Ejemplo 1.34 - La longitud de un puente sobre un río es $4500m$, determine el orden de magnitud de la longitud del puente.



1) Se escribe en notación científica $4.50\times10^3 m$.

2) Luego se compara $4.50 > \sqrt{10}$.

3) El orden de magnitud es $OM = 10^{(3+1)}m = 10^4 m$.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Magnitudes fundamentales y derivadas

Actividad 1.1

Escribir 4 magnitudes derivadas con sus respectivas unidades y símbolos.

	1.	2.	3.	4.
Nombre				
Unidad				
Símbolo				

Actividad 1.2

Investigar las **definiciones actuales** de los patrones de medida de las magnitudes fundamentales en el sistema internacional.

El metro se define como:

El segundo se define como:

El kilogramo se define como:

El ampere se define como:

El kelvin se define como:

El mol se define como:

Actividad 1.3

Determine la ecuación dimensional de la cantidad de movimiento. La cantidad de movimiento se define como la masa multiplicada por la velocidad $\vec{p} = m\vec{v}$.

Actividad 1.4

Si la energía cinética de un cuerpo se define como $K = 1/2\ mv^2$, donde m es la masa del cuerpo y v es la rapidez, determine las dimensiones de la energía cinética (K).

Actividad 1.5

La ecuación de la posición de una partícula viene dada por $x = A + Bt + Ct^2$, donde x está en metros y t en segundos. Determine las dimensiones de $\frac{AC}{B}$.

Actividad 1.6

Considere la siguiente ecuación dimensional $\frac{ma}{A} = \rho ch$, siendo m=masa, a=aceleración, A = área, ρ = densidad (masa/volumen), h = altura. Determine la dimensión de c.

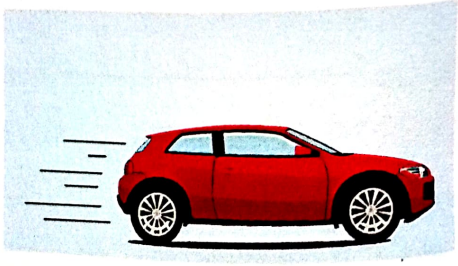
Actividad 1.7

La ecuación experimental del caudal en un vertedero rectangular es: $Q = C_0\ 2/3\ \sqrt{2g}\ lz^{3/2}$, donde Q tiene unidades m^3/s, l es el ancho, C_0 es adimensional y g la gravedad. Determine la dimensión de z.

Conversión de Unidades

Actividad 1.8

Un automóvil se mueve con una rapidez de 90.0 km/h. Determine la rapidez del automóvil en $\frac{yardas}{s}$.



Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 1.9

Expresar $158.25\ km/h$ en $\frac{pie}{s}$.

Actividad 1.10

Para elaborar bocaditos se mezclan $1362\ gramos$ de mantequilla y $22.0\ libras$ de harina. Determine la masa total de la mezcla en *kilogramos*.

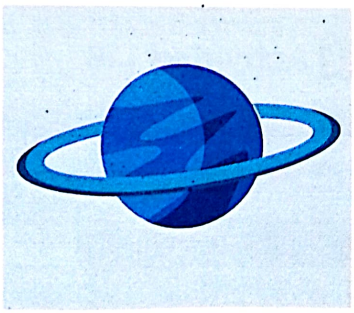
Actividad 1.11

La distancia de la Tierra al Sol es de $149600000\ km$, entonces el tiempo en segundos que tarda en llegar la luz a la Tierra es de:

En Física, particularmente en Astronomía, en particular es muy común utilizar una unidad llamada el **año luz**, la misma que representa la distancia recorrida por la luz durante un año. Esta distancia (**año luz**), debe ser calculada de la siguiente forma $d = v \cdot t$. La velocidad de la luz es $3.00 \times 10^8\ m/s$

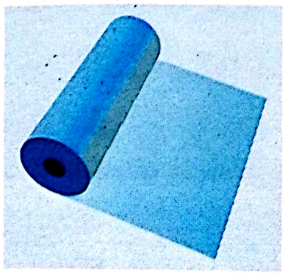
Usar: $d = v \cdot t$ $v_{luz} = 3.00 \times 10^8\ m/s$

Actividad 1.12



Se ha descubierto un nuevo planeta cuyo radio promedio es $r = 3.34 \times 10^3\ km$. Si la masa del planeta es $m = 3.1 \times 10^{24}\ kg$. Determine la densidad promedio del planeta en g/cm^3. Nota: La densidad es la masa dividida para el volumen y considere la forma del planeta como una esfera. El volumen de una esfera es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Actividad 1.13



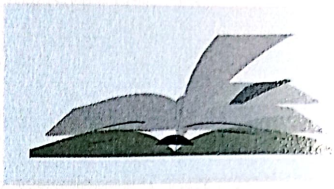
Dolores desea confeccionarse un pantalón para lo cual su modista le ha sugerido que compre $3.00\ metros$ de tela, pero en el lugar que suele comprar la tela solo se vende por yardas, ¿Cuántas yardas debería comprar para que su modista le pueda confeccionar el pantalón?

Actividad 1.14

Se tiene tres sustancias diferentes con las siguientes densidades $0.275\ lb/pulg^3$, $6.21\ g/cm^3$, $2.32\ onzas/pulg^3$. Ordene de menor a mayor las densidades en unidades del ***Sistema Internacional de Unidades (SI)***.

Notación Científica

Actividad 1.15



Medir, en ***cm***, el espesor total de las hojas de un libro, luego dividir para el número de hojas y expresar el espesor de una hoja en notación científica en ***cm***.

Actividad 1.16

Medir, en ***cm***, el perímetro de su cuaderno y expresarlo en notación científica en ***cm*** y en pulgadas.

Actividad 1.17

Expresar las siguientes mediciones en notación científica.

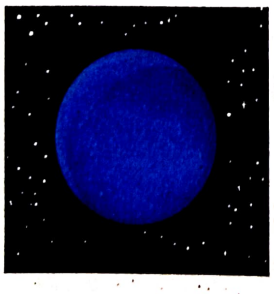
a) $12.5\times10^{-3}s$ ____ b) $0.0000025\ s$ ____

c) $3000000\ s$ ____ d) $120.00\ s$ ____

Actividad 1.18

Expresar en notación científica las siguientes cantidades:

	a) 2500000	b) 0.2547	c) 1258	d) 0.0005262
Notación Científica				



Actividad 1.19

El radio promedio de la Luna es de $1740\ km$, expresar su volumen en m^3, en notación científica y 3 decimales. Considerar la Luna como una esfera. Volumen de una esfera es $V=\frac{4}{3}\pi r^3$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Prefijos

Actividad 1.20

Complete las siguientes analogías: kilo es a 10^{+3} como mega es a ____

a) 10^{+2} b) 10^{+13}
c) 10^{+4} d) 10^{+6}

centi es a 10^{-2} como mili es a ____

a) 10^{-3} b) 10^{+3}
c) 10^{+5} d) 10^{+6}

Actividad 1.21

Dada las siguientes cantidades físicas, ordenar de menor a mayor y completar la Tabla que se encuentra a continuación: ***cm, mm, dm, m, hm, km, dam, Mm, Pm, Gm, Tm, Em, Zm***

10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{0}	10^{+1}	10^{+2}	10^{+3}	10^{+6}	10^{+9}	10^{+12}	10^{+15}	10^{+18}	10^{+21}
mm												*Zm*

Actividad 1.22

Se ha descubierto una nueva partícula que puede alcanzar hasta $v = 2.80\times10^{5}\ km/s$. Si la partícula puede recorrer una distancia de $d = 4.00$ pulgadas entre dos placas. ¿En cuántos **picosegundos** la partícula hizo este recorrido?. Use $d = v \cdot t$.

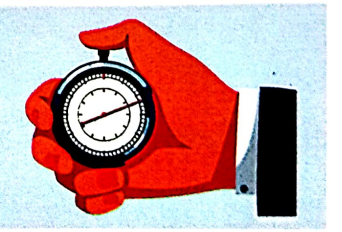
Actividad 1.23

Una estrella se encuentra ubicada a 3.00 años luz de la Tierra, entonces la estrella está a una distancia de la Tierra en *km* de: usar $v_{luz} = 3.00\times10^{8}\ m/s$, $d = v \cdot t$

En Física, particularmente en Astronomía, en particular es muy común utilizar una unidad llamada el **año luz**, la misma que representa la distancia recorrida por la luz durante un año. Esta distancia (**año luz**), debe ser calculada de la siguiente forma $d = v \cdot t$. La velocidad de la luz es $3.00\text{x}10^{8}\ m/s$

Actividad 1.24

En un experimento de Física se midió los tiempos con un cronómetro obteniéndose los siguientes tiempos: $0.021ms$, $5.42\mu s$. Determine la suma de los tiempos y expresarlo en microsegundos.



Redondeo

Actividad 1.25

Redondear a tres decimales las siguientes cantidades:

a) 12.5589	b) 0.02550	c) 0.00437	d) 8.7452	e) 2.004501

Actividad 1.26

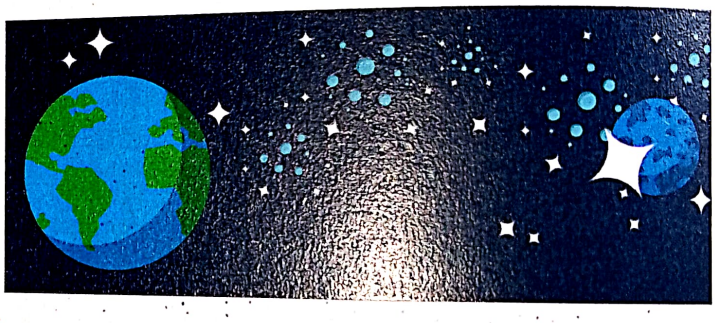
Completar la siguiente tabla de redondeos.

MEDICIÓN	REDONDEAR A:		
	3 decimales	2 decimales	1 decimal
12.5897			
587.47892			
0.14587			
0.09856			

Actividad 1.27

Una estrella se encuentra ubicada a 3.00 años luz de la Tierra. Determine la distancia entre la estrella y la Tierra, expresar su respuesta en km, usando notación científica y redondeando a 2 decimales.

En Física, particularmen en Astronomía, en particular es muy común utilizar una unidad llamada el **año luz**, la misma que representa la distancia recorrida por la luz durante un año. Esta distancia (**año luz**), debe ser calculada de la siguiente forma $d = v \cdot t$. La velocidad de la luz es $3.00 \times 10^8\ m/s$



Actividad 1.28

La distancia de la Tierra al Sol es de $149600000\ km$. Determine el tiempo que tarda en llegar la luz a la Tierra, exprese su respuesta en segundos (s), utilizando notación científica y redondeando a 3 decimales.

Usar $v_{luz} = 3.00 \times 10^8\ m/s$, $d = v \cdot t$

Cifras Significativas

Actividad 1.29

La longitud de la varilla mostrada en la figura es:

a) $1.4\ cm$ b) $1.5\ cm$

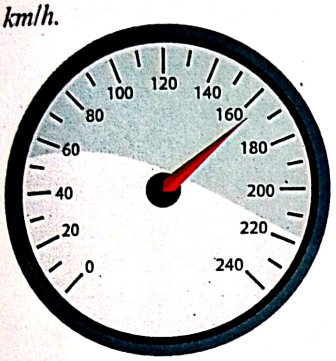
c) $1.41\ cm$ d) $1.45\ cm$

e) $1.04\ cm$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

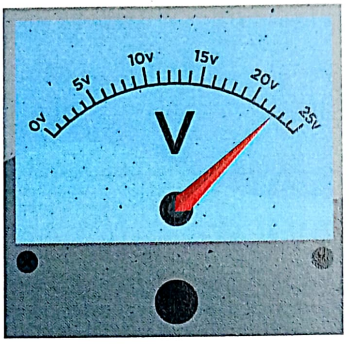
Actividad 1.30

Expresar correctamente la siguiente medición en *km/h*.



Actividad 1.31

En la siguiente figura expresar correctamente la medición del voltímetro.



Actividad 1.32

En las siguientes mediciones, completar el número de cifras significativas:

MEDICIÓN	NÚMERO DE CIFRAS SIGNIFICATIVAS
$(15 \pm 1)cm$	
$(1.500 \pm 0.001)s$	
$(1.0 \pm 0.1 \times 10^3)kg$	
$(1.115 \pm 0.001) \times 10^3 m$	
$(0.01000 \pm 0.00001)g$	
$(0.00015 \pm 0.00001)m$	

Actividad 1.33

Indique en cada grupo, cuál es la medición con el mayor número de cifras significativas.

a)	0.058	25.1	11	
b)	100.5280	0.00254	12.5	
c)	52.0	2.501	0.0010	

Actividad 1.34

En un experimento de Física, un amperímetro indica tres mediciones de corriente: 0.0350 A, 14.020 A y 0.2008 A. Indique el número de cifras significativas de cada **medición.**

a) 0.0350 A	b) 14.020 A	c) 0.2008 A

Actividad 1.35

Considerando que todas las cantidades son **mediciones**, realice las siguientes operaciones:

a) $(2.15\times3.0)/(2.523) - 4.0 =$

b) $4.15\ g + 2.0\ g + 0.075\ g =$

c) $(7.0\times2.25)/2 + (3.20\times1.75)/(1.95) =$

Actividad 1.36

Realizar las operaciones con las siguientes **mediciones**:

a) $4.54 \times 17 - 3.5 =$

b) $\dfrac{(3.28\times20)}{1.8} + 21 =$

c) $\dfrac{12.99}{2.7} - 2.7 + 3.05 =$

Actividad 1.37

Dadas las siguientes mediciones: $a = (15 \pm 1)\ cm$ $b = (2.0 \pm 0.1)\ cm$ $c = (4.00 \pm 0.01)\ cm$

Hallar el resultado de:

a) $a + b + c =$ b) $a \times b =$ c) $\dfrac{a \times c}{b} =$

Actividad 1.38

Una cisterna cilíndrica tiene un radio de $(650 \pm 1)\ mm$ y una altura de $(3.85 \pm 0.01) m$, expresar su volumen en m^3.
El volumen de un cilindro es $V = \pi r^2 h$, donde V es volumen, r es radio, h es altura.

Nota: Considerar que el radio, la altura **son mediciones**.

Actividad 1.39

En un laboratorio se **midieron** las masas de tres sustancias con diferentes balanzas $0.0123\ lb$, $0.125\ onzas$, $201\ g$. Determine la masa total en gramos.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 1.40

Karina gana $4.50 de comisión por cada libro que vende, en un día logra vender 15 libros; además durante ese día gastó $9.75 en comida y transporte. Si decide pagar sus deudas que ascienden a $15.5, ¿Cuánto dinero le queda?

Nota: considerar que todas las cantidades tienen cifras significativas.

Error o incertidumbre relativa

Actividad 1.41

Dadas las siguientes mediciones:

$a = (15 \pm 1)cm \quad b = (2.0 \pm 0.1)cm \quad c = (4.00 \pm 0.01)cm$

Determine la medición más precisa.

Actividad 1.42

Ordenar las siguientes mediciones desde la menos precisa a la más precisa.

$(182 \pm 1)\ kg \quad (14.25 \pm 0.01)\ kg \quad (25.2 \pm 0.1)\ kg$

1.

2.

3.

Orden de Magnitud

Actividad 1.43

Se tiene una cantidad de líquido y se desea expresarlo en unidades de volumen que tenga el mayor orden de magnitud. De las siguientes unidades, ¿Cuál debería utilizar?

a) cm^3 b) m^3 c) $pulg^3$ d) L e) pie^3

Actividad 1.44

Determine el orden de magnitud de su edad en años.

Actividad 1.45

Determine el orden de magnitud del número de estudiantes de su aula de clases.

Actividad 1.46

La masa de un electrón es $9.11 \times 10^{-31}\ kg$. Determine el orden de magnitud de la masa expresada en gramos.

Actividad 1.47

Indicar el orden de magnitud de las siguientes mediciones:

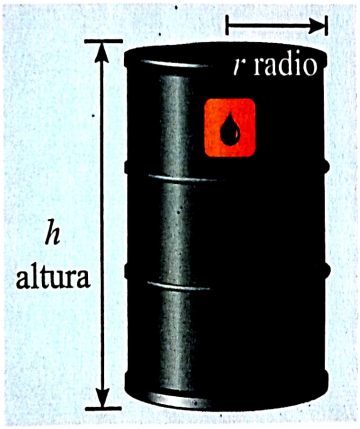
MEDICIÓN	ORDEN DE MAGNITUD
$4.15\times10^{5}\,m$	
$1.287\times10^{-6}\,m$	
$8.001\times10^{4}\,m$	
$5.20\times10^{-5}\,m$	

Actividad 1.48

Considerando que el promedio de vida del ser humano es de 80 años y que la frecuencia cardiaca de una persona en buen estado es de 50 pulsos por minuto. Determine el orden de magnitud del número de pulsos durante toda la vida del ser humano.

Actividad 1.49

Determine el orden de magnitud de las horas totales que dormiría una persona en toda su vida, sabiendo que el promedio de vida es de 75 años y que duerme 8 horas diarias.



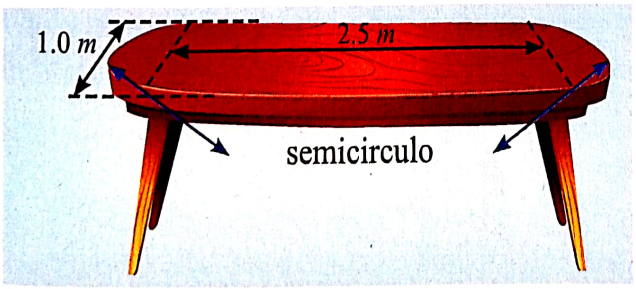
Actividad 1.50

Un cilindro macizo de hierro tiene las siguientes dimensiones radio $r = 11.30mm$, altura $h = 28.85\ mm$ y masa $m = 0.000157\ kg$, determine la densidad en kg/m^3 y su orden de magnitud.

Nota: Considere que todas las cantidades son mediciones, densidad (ρ) es masa/volumen ($\rho = \frac{m}{\pi \times r^2 \times h}$).

Actividad 1.51

Utilizando las reglas para realizar operaciones con cifras significativas en el cálculo del área de una mesa como se indica en la figura, determine:



a) El área de mesa en m^2.

b) El orden de magnitud del área

Actividad 1.52

Una mujer tiene $4.25\times10^{-3}\ m^3$ de sangre en el cuerpo, considerando que la densidad de la sangre es $1050\ kg/m^3$. Determine el orden de magnitud de la masa de sangre en el cuerpo de la mujer en gramos.

Nota: *masa = densidad x volumen.*

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: ..... Paralelo: .....

Nombre:..... Paralelo: .....

1.1 La ecuación dimensional del torque es:

La magnitud del torque es fuerza multiplicada por la distancia.

a) $[L^2][M][T^{-3}]$ b) $[L^2][M][T]$ c) $[L][M][T]$ d) $[L^2][M][T^{-2}]$

1.2 La ecuación dimensional de la densidad es:

La densidad se define como la relación de la masa sobre el volumen.

a) $[M][L^3]$ b) $[M][L^2]$ c) $[M][L]$ d) $[M][L^{-3}]$

1.3 La ecuación dimensional del periodo es:

a) $[T^2]$ b) $[T^3]$ c) $[T]$ d) $[T^4]$

1.4 La ecuación dimensional del caudal es:

El caudal se define como el área multiplicado por la velocidad

a) $\left[\frac{L}{T}\right]$ b) $\left[\frac{L^3}{T^2}\right]$ c) $\left[\frac{L^2}{T}\right]$ d) $\left[\frac{L^3}{T}\right]$

1.5 La ecuación dimensional de la potencia es:

La potencia se define como la relación del trabajo dividido para el tiempo empleado o la fuerza multiplicada por la velocidad.

a) $[L^2][M][T^{-1}]$ b) $[L][M][T^{-3}]$ c) $[L^2][M][T^{-3}]$ d) $[L^2][M^2][T^{-3}]$

1.6 Dada la siguiente expresión de velocidad $v^2 = A + 2B\Delta x$. Las dimensiones de A son:

a) $[L]$ b) $[LM]$ c) $[L^2T^{-2}]$ d) $[LT]$

1.7 Con relación al problema anterior. Las dimensiones de B son:

a) $[LT]$ b) $\left[\frac{L}{M}\right]$ c) $[LT^{-1}]$ d) $[LT^{-2}]$

1.8 Dada la siguiente expresión $\Delta r = At^3 + Bt + C$, para el desplazamiento (Δr) de una partícula en función del tiempo (t), las dimensiones de A son:

a) $[LT]$ b) $[LM]$ c) $[LT^{-1}]$ d) $[LT^{-3}]$

1.9 Con relación al problema anterior, las dimensiones de B son:

a) $[LT]$ b) $[LM]$ c) $[LT^{-1}]$ d) $[LT^2]$

1.10 Con relación al problema 1.8, la dimensión de C es:

a) $[L]$ b) $[LT]$ c) $[LM]$ d) $[MT]$

1.11 La metrovía se mueve a una rapidez de 40.0 $\frac{km}{h}$, la rapidez en $\frac{m}{s}$ es:

a) 11.1 $\frac{m}{s}$ b) 22.2 $\frac{m}{s}$ c) 40.0 $\frac{m}{s}$ d) 90.0 $\frac{m}{s}$

1.12 Un anuncio sobre el puente de la Unidad Nacional muestra que la velocidad máxima es de 90 $\frac{km}{h}$, la velocidad en $\frac{m}{s}$ es:

a) 20$\frac{m}{s}$ b) 25$\frac{m}{s}$ c) 40$\frac{m}{s}$ d) 90$\frac{m}{s}$

1.13 David se dirige a comprar 2.00 lb de arroz en la tienda de la esquina, pero en el local hay una balanza en kg ¿Cuántos kg debe marcar dicha balanza?

a) 0.909 kg b) 1.00 kg c) 0.45 kg d) 2.00 kg

1.14 Mirella desea preparar una torta de chocolate para lo cual necesita los siguientes ingredientes:

INGREDIENTES	MASA EN (lb)	MASA EN (g)
Harina	1.50	681
Bicarbonato	0.110	49,9
Polvo de hornear	0.0500	22,7
Polvo de cacao	1.00	454
Sal	0.110	49,9
Vinagre	0.110	49,9
Total	Total en libras = 2,88 lb	Total en gramos = 1307 g

Realizar las conversiones de unidades respectivas, llenar la tabla y determinar la masa total en gramos y en libras.

En los problemas del 1.15 al 1.18, expresar las siguientes cantidades en notación científica.

1.15 El diámetro de un cabello es 0.000026 m.

a) $2.6 \times 10^{-5} m$ b) $2.6 \times 10^{5} m$ c) $2.6 \times 10^{-4} m$ d) $2.6 \times 10^{4} m$

Nombre: ..... Paralelo: .....

1.16 El radio de la Tierra es 6400000 m.

a) $6.4 \times 10^{+5} m$ b) $6.4 \times 10^{-5} m$ c) $6.4 \times 10^{+6} m$ d) $6.4 \times 10^{-6} m$

1.17 El diámetro de un hilo de alambre de cobre es 0.000134 m.

a) $1.34 \times 10^{-5} m$ b) $1.34 \times 10^{-4} m$ c) $1.34 \times 10^{+4} m$ d) $1.34 \times 10^{+5} m$

1.18 La carga eléctrica de un cuerpo es 0.0000015 C (*Coulomb*), entonces, se puede expresar de la siguiente manera.

a) $15\,mC$ b) $1.5\,\mu C$ c) $1.5\,nC$ d) $1.5\,pC$

1.19 Ordenar las siguientes cantidades físicas de menor a mayor y complete la tabla adjunta.

m, mm, dam, cm, hm, km, dm

$10^{-3} m$	$10^{-2} m$	$10^{-1} m$	$10^{0} m$	$10^{+1} m$	$10^{+2} m$	$10^{+3} m$
mm			m			km

1.20 Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 2.043 m b) 2.0678 s

1.21 Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 1.023 m b) 4.004 lb

1.22 Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 1.105 m 1,10 m b) 4.075 lb 4,08 lb

1.23 Redondear las siguientes cantidades a dos decimales.

a) 3.105001 kg	b) 2.1450001 s	c) 15.2050001 m	d) 5.005004 N

1.24 La rapidez de un tren es de 142 $\frac{millas}{h}$, expresar la rapidez en $\frac{m}{s}$, en notación científica y con dos decimales.

a) $6.35 \times 10^{+1}$ b) 6.35×10^{-1}

c) $6.35 \times 10^{+2}$ d) 6.35×10^{-2}

1.25 La densidad del mercurio es de 13.6 $\frac{g}{cm^3}$, expresar esta densidad en $\frac{kg}{m^3}$, y con dos decimales.

a) $1.36 \times 10^{+4}$ b) 1.36×10^{-4}

c) $1.36 \times 10^{+3}$ d) 1.36×10^{-3}

Si se tienen las siguientes mediciones: $a = (25 \pm 1)m$, $b = (8.7 \pm 0.1)m$ y $c = (2 \pm 1)m$

1.26 Hallar.

a) $a - b =$ b) $b - c =$ c) $b \times c =$

1.27 En el siguiente conjunto de mediciones escribir el número de cifras significativas.

a) $0.0012\ m$ ____

b) $1.2 \times 10^{-3} m$ ____

c) $120\ m$ ____

d) $0.0100003 \times 10^{3} m$ ____

1.28 De las siguientes mediciones, ¿cuál es la medición que está mal expresada?.

a) $(2.90 \pm 0.10)\ cm$ b) $(2.65 \pm 0.01)\ m$

c) $(10 \pm 0.1)\ m$ d) $(1.6 \pm 0.1)\ kg$

1.29 De las siguientes medicines, ¿cuál es la medición más precisa?.

a) $(2.40 \pm 0.01)\ cm$ b) $(1.6 \pm 0.1)\ m$

c) $(10.1 \pm 0.1)\ m$ d) $(1.6 \pm 0.1)\ kg$

PROBLEMAS PROPUESTOS

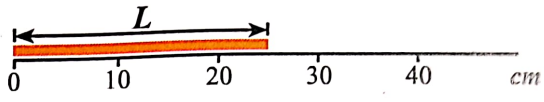
Nombre: .....

Paralelo: .....

1.30 Con relación al siguiente instrumento de medición, ¿cuál de las siguientes mediciones está correctamente expresada?. Ver Figura.

a) $(2.5 \pm 0.10)\ cm$ b) $(25 \pm 1)\ cm$

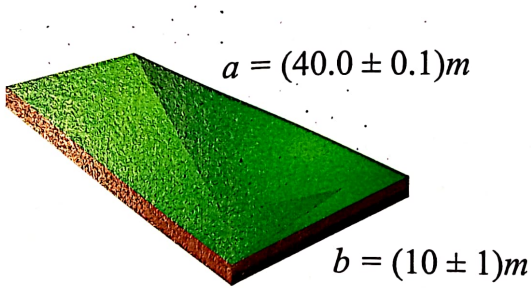
c) $(2.50 \pm 0.1)\ cm$ d) $(2.5 \pm 0.1)\ cm$



1.31 Escriba el número de cifras significativas correcto de acuerdo a la siguiente tabla de mediciones.

Medición	$155\ cm$	$1.00\ s$	$1.035\times10^3\ kg$	1.1×10^3 m	$0.00010\ g$	$1.01005\ m$
# Cifras Significativas						

Se mide las dimensiones a y b, de un terreno de forma rectangular, como se indica en la figura. **En los problemas 1.32, 1.33 y 1.34.** Escoja la alternativa correcta.



1.32 El área del terreno es:

a) $40 \times 10^2\ m^2$ b) $400\ m^2$ c) $4.0 \times 10^2\ m^2$ d) $4 \times 10^2\ m^2$

1.33 El perímetro del terreno es:

a) $100.0\ m$ b) $1.0 \times 10^2\ m$ c) $10 \times 10^2\ m$ d) $100\ m$

1.34 Si el propietario del terreno desea vender la mitad del mismo, en forma triangular. ¿Cuál es el área del terreno a vender?.

a) $2 \times 10^2\ m^2$ b) $2.0 \times 10^2\ m^2$ c) $20 \times 10^2\ m^2$ d) $2.00 \times 10^2\ m^2$

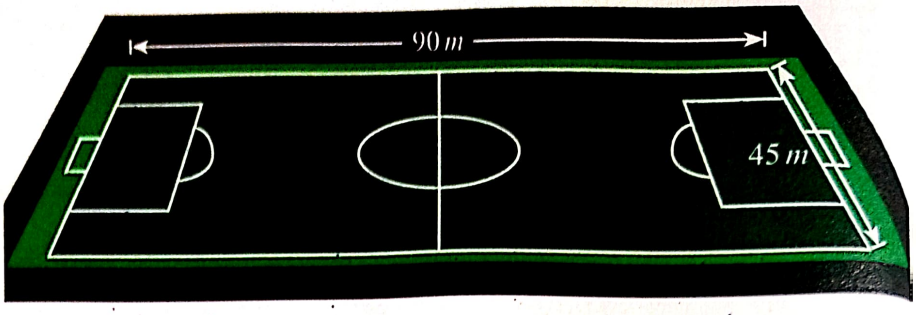
1.35 Determine el orden de magnitud en m, del perímetro de una cancha de futbol de forma rectangular de $90.0\ m$ de largo por $45.0\ m$ de ancho. Ver figura.

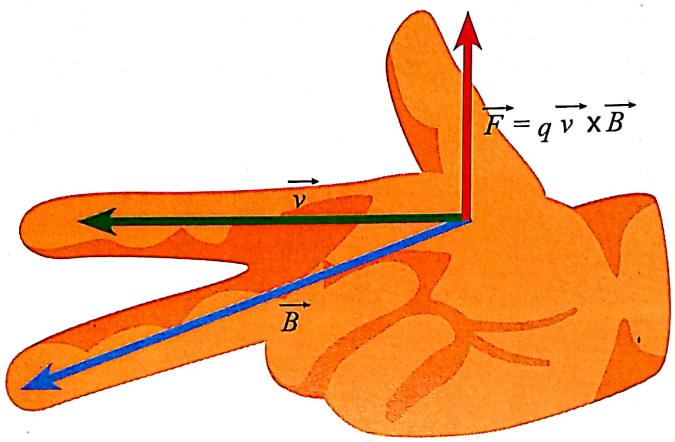
a) $OM = 10^1\ m$

b) $OM = 10^2\ m$

c) $OM = 10^3\ m$

d) $OM = 10^4\ m$





2 | VECTORES

La Física estudia los fenómenos que ocurren en la naturaleza y por ende debemos tener maneras de interpretarlas. Si una persona se mueve de un lugar a otro, lo puede hacer por diferentes caminos: unos caminos pueden ser muy irregulares y otros pueden ser directamente en línea recta. Para distinguirlos llamaremos a unos distancias recorridas y a otros, desplazamientos; aun cuando parecen sinónimos, veremos que son totalmente diferentes, es ahí que se utiliza el concepto de vectores y escalares. Hay muchos casos que ocurren en nuestra vida diaria y a menudo confundimos las cantidades llamadas vectores de las cantidades llamadas escalares.

2 | VECTORES

2.1 CANTIDADES ESCALARES

Son cantidades que para su total determinación solo se necesita especificar su magnitud con sus respectivas unidades. Por ejemplo, cuando decimos que la duración del examen es de dos horas, la idea está completa, es decir, todos entenderán en qué momento el examen termina y no necesita de ninguna aclaración. Otro ejemplo sería el de la temperatura: si una persona tiene una temperatura de 39°C, obviamente la persona está enferma y necesita ir al médico. En estos ejemplos, el tiempo y la temperatura son cantidades escalares.

Otros ejemplos de cantidades escalares son: la densidad de un objeto, el volumen de un cuerpo, la rapidez de un auto, el potencial eléctrico, etc.

2.2 CANTIDADES VECTORIALES

Son cantidades que para su total determinación se necesita, además de la magnitud, indicar su dirección.

Por ejemplo, si decimos que un carro se mueve a 20 m/s, no podemos asegurar donde se encontrará después de un determinado tiempo porque no especificamos su dirección; lo correcto habría sido decir que el carro se mueve a 20 m/s en dirección Norte, en este caso podemos asegurar dónde encontrar el carro después de cierto tiempo. Un ejemplo sencillo sería contestar a la siguiente pregunta: ¿Puede usted mover un bloque cuya masa sea de 10 kg?. Para contestar la pregunta usted necesita conocer en qué dirección tiene que aplicar la fuerza.

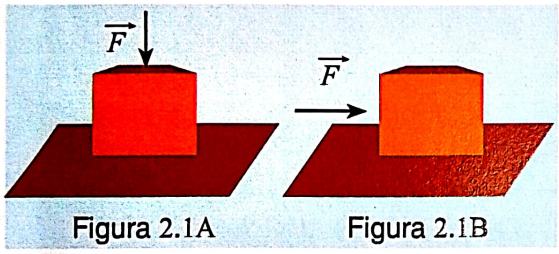


Figura 2.1A Figura 2.1B

En la figura 2.1A el bloque no se va a mover, mientras que en la figura 2.1B el bloque probablemente se moverá; esto nos indica que la fuerza es una cantidad vectorial, por lo tanto se necesita conocer la dirección de la fuerza para que un evento ocurra o no. Por supuesto esto ocurrirá dependiendo de la magnitud de la fuerza aplicada y de la fricción entre este y el piso.

Otros ejemplos de cantidades vectoriales son:

Aceleración:	5.0 m/s^2 a 60° al Norte del Este
Velocidad:	20.0 m/s hacia el Sur
Campo eléctrico:	516 N/C 30° al Oeste del Norte

Cantidad de movimiento, torque, velocidad angular, etc. Se observa que las cantidades vectoriales tienen magnitud, dirección y unidades.

2.3 REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y NOMENCLATURA DE UN VECTOR

Un vector se representa gráficamente mediante una flecha cuya **longitud representa la magnitud** del vector y la dirección del mismo está dado por el ángulo theta (θ). La dirección es el ángulo que el vector forma con el eje positivo de las x y se lo mide empezando desde el eje positivo de las x hacia el vector.

Los siguientes ejemplos aclararán mejor el escenario.

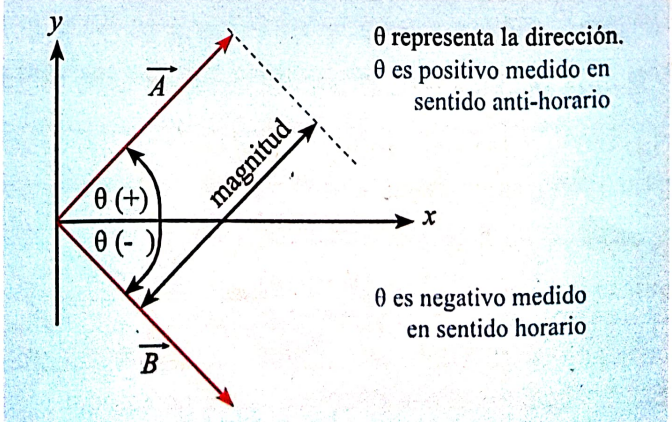


Figura 2.2

2.3.1 MAGNITUD DE UN VECTOR

Cuando se dice que un vector es de $4N$ y está en dirección Norte, la magnitud del vector es $4N$ y la dirección es Norte. Si se tiene un vector $\vec{A}$ su magnitud se representa de las siguientes formas: A, $|\vec{A}|$ y se lee: módulo o magnitud del vector $\vec{A}$; el módulo o magnitud de un vector es siempre una cantidad positiva.

Cuando se mide el ángulo, empezando desde el eje positivo de las x, y se gira en contra de las manecillas del reloj, esa dirección se considera positiva.

Si se empieza a medir el ángulo desde el eje positivo de las x, y se gira a favor de las manecillas del reloj, esa dirección se considera negativa.

2.3.2 FORMAS DE EXPRESAR UN VECTOR

Un vector se puede expresar en coordenadas polares, rectangulares y geográficas.

Ejemplo 2.1

El vector campo eléctrico $\vec{E} = 100\ N/C$ de la figura 2.3, expresarlo en las formas polar, rectangular y geográfica.

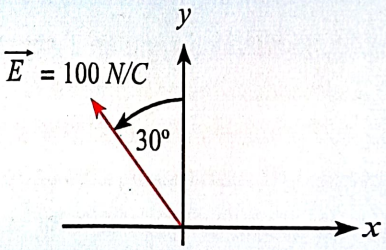
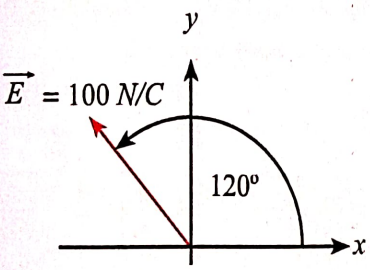


Figura 2.3

Solución

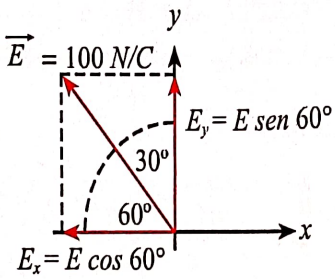
Coordenadas Polares



$\vec{E} = 100\ N/C\ ;\ \theta = 120°$

Figura 2.4

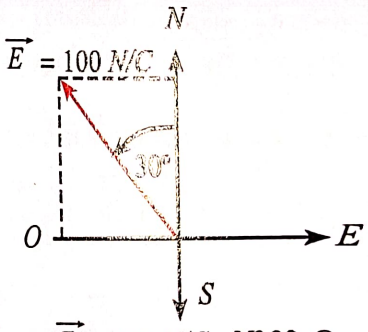
Coordenadas Rectangulares



$\vec{E} = -\ 50\ \hat{i} + 86.6\ \hat{j}\ [N/C]$

Figura 2.5

Coordenadas Geográficas



$\vec{E} = 100\ N/C\ ;\ N30°\ O$

Figura 2.6

2.4 OPERACIONES CON VECTORES

2.4.1 MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UN VECTOR

Cuando se multiplica un escalar por un vector, el vector puede aumentar su magnitud, disminuir su magnitud, girar 180°, o mantenerse constante; todo esto depende del signo y del escalar que multiplica el vector.

Suponga que el escalar es λ:

Si λ es positivo la magnitud y diferente de 1, la magnitud del vector aumenta o disminuye, pero la dirección del vector no cambia. Si λ es negativo, su magnitud puede aumentar o disminuir y la dirección del vector gira 180°. Si λ es igual a 1 la magnitud del vector no cambia.

Ejemplo 2.2 - Sea el vector $\vec{A}$ cuya dirección es 0º.

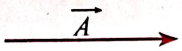


Figura 2.7

a) Grafique el vector $2\vec{A}$ b) Grafique el vector $0.5\vec{A}$ c) Grafique el vector - $2\vec{A}$ d) Grafique el vector - $\vec{A}$

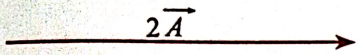


Figura 2.8

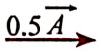


Figura 2.9

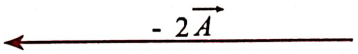


Figura 2.10

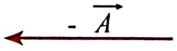


Figura 2.11

2.4.2 SUMA DE VECTORES POR MÉTODOS GRÁFICOS

Los vectores se suman, restan y multiplican. Estas operaciones son diferentes a las que se realizan con escalares. Las cantidades vectoriales aplican diferentes procesos para la suma, resta y multiplicación.

SUMA DE VECTORES

Los vectores se pueden sumar por el método gráfico del polígono, paralelogramo o por métodos analíticos.

A) MÉTODO GRÁFICO DEL POLÍGONO

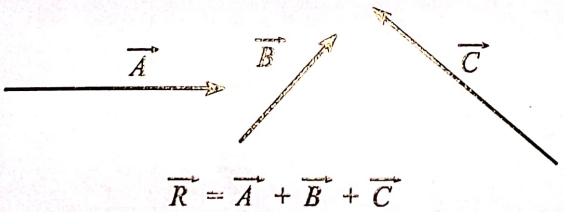
Los vectores se colocan uno a continuación de otro, de modo que la flecha de un vector coincida con el origen del siguiente, y así sucesivamente; la resultante, es el vector que empieza en el origen del primero y termina en la flecha del último.

Ejemplo 2.3 - Dados los siguientes vectores, calcule el valor de la resultante.

$\vec{A} = 10\ u;\ \theta = 0º$

$\vec{B} = 8\ u;\ \theta = 50º$

$\vec{C} = 12\ u;\ \theta = 135º$



Usando la misma escala que se utilizó para graficar los vectores, se mide la resultante y con un graduador se mide el ángulo θ entre la resultante y el eje positivo de las x.

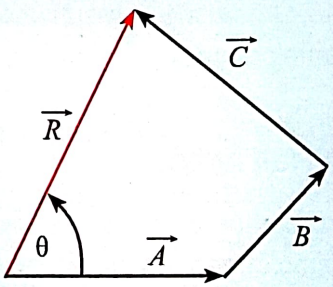


Figura 2.12

Ejemplo 2.4 - Dados los siguientes vectores, calcule la suma de los mismos utilizando el método gráfico del polígono.

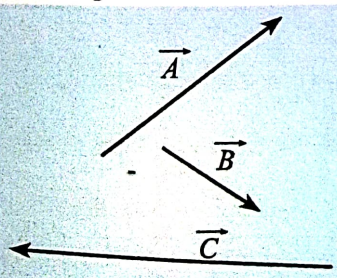


Figura 2.13

$\vec{R}$ representa la magnitud del vector suma y θ la dirección del vector. Nuevamente, usando la escala con que se graficaron los vectores, se calcula el valor de la resultante; un graduador medirá el ángulo θ correspondiente.

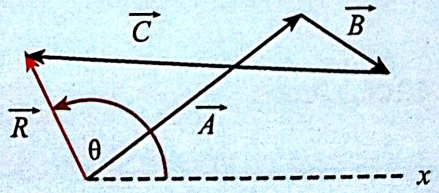


Figura 2.14

B) MÉTODO GRÁFICO DEL PARALELOGRAMO

Este es otro método gráfico que se usa para sumar vectores. Un paralelogramo es una figura geométrica formada por cuatro lados, dos pares de lados de igual longitud y paralelos, como se muestra en la figura 2.15.

Los lados de color rojo son paralelos y de igual longitud. De igual manera, los lados de color azul son paralelos y de igual longitud.

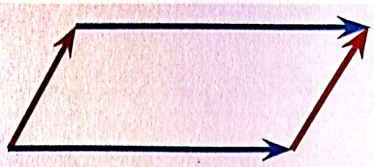


Figura 2.15

Ejemplo 2.5 - Sean dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestra en la figura 2.16. Calcule el vector resultante.

Solución

Como se puede observar en la figura 2.16, los vectores que se van a sumar son dibujados de modo que sus orígenes coincidan en un punto común; en este caso, el punto común es el origen de un sistema de ejes cartesianos en el plano xy.

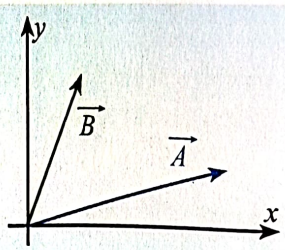


Figura 2.16

Se forma un paralelogramo siendo sus lados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La resultante es el vector que parte del origen y se dirige al vértice opuesto del paralelogramo formado; en la figura 2.17, el vector en rojo es el vector resultante, este remplaza a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

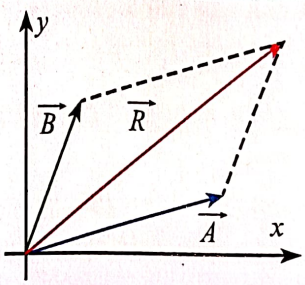


Figura 2.17

Ejemplo 2.6 - Sean los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, y $\vec{C}$ como se muestra en la figura 2.18. Determine la resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ usando el método gráfico del paralelogramo.

Solución

PRIMER PASO:

Graficar los vectores que se van a sumar haciendo que todos ellos partan del mismo origen 0 como se muestra en la Figura 2.18.

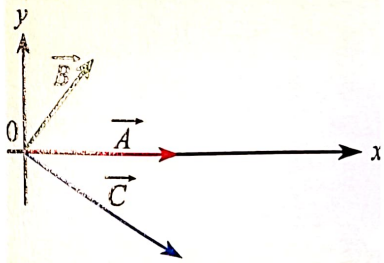


Figura 2.18

SEGUNDO PASO:

Formar un paralelogramo entre dos vectores. Estos pueden ser $\vec{A}$ y $\vec{B}$, $\vec{A}$ y $\vec{C}$, o $\vec{B}$ y $\vec{C}$; en este ejemplo se escogen los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La figura 2.19 muestra el paralelogramo formado por estos vectores, la diagonal que parte del origen hasta el vértice opuesto es la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

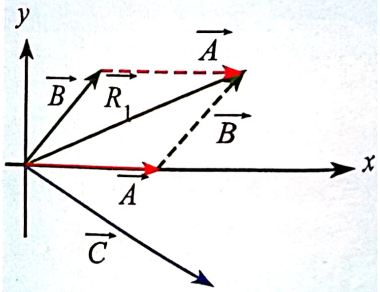


Figura 2.19

TERCER PASO

La resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ (es decir, $\vec{R}_1$) y el vector $\vec{C}$ forman otro paralelogramo y la resultante total es el vector que parte del origen y se dirige al vértice opuesto del paralelogramo como en la figura 2.20

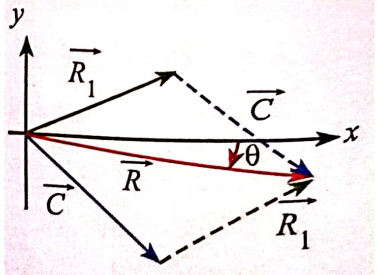


Figura 2.20

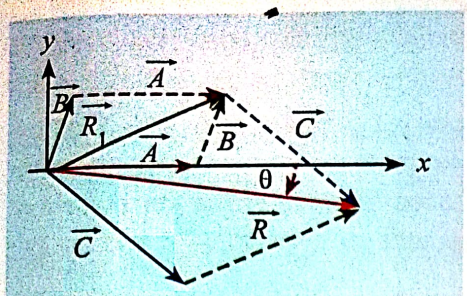


Figura 2.21

Estos tres pasos se pueden realizar en un solo diagrama, como se muestra en la figura 2.21. Por último, se mide la longitud de la resultante usando la misma escala que se usó para graficar los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ y se mide con un graduador el ángulo θ con respecto al eje positivo de las x.

En primer lugar, se forma un paralelogramo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, la diagonal que parte del origen es el vector resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$; Este vector llamado $\vec{R}_1$, reemplaza a $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

El siguiente paso es formar otro paralelogramo entre $\vec{R}_1$ y el tercer vector $\vec{C}$. La resultante de los tres vectores es $\vec{R}$ que es el vector que parte del origen y se dirige a lo largo de la diagonal, hacia el vértice opuesto, como se muestra en la figura 2.21. Este procedimiento puede continuar formando más paralelogramos entre $\vec{R}$ y un cuarto vector que pudiera existir.

LEY CONMUTATIVA DE LA ADICIÓN

Si se tienen dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se cumple que: $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

LEY ASOCIATIVA: $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$

LEY DISTRIBUTIVA: $c(\vec{A} + \vec{B}) = c\vec{A} + c\vec{B}$; c es un escalar

2.5 EL VECTOR NEGATIVO

Existe un vector que es negativo y es aquel cuya dirección forma 180° con el vector original. El vector en color azul es el negativo del vector en color rojo. De igual manera, el vector en color rojo es el negativo del vector de color azul.

La suma de un vector y su negativo es cero.

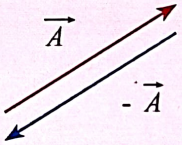


Figura 2.22

2.6 VECTORES COLINEALES

Son aquellos que se encuentran a lo largo de una línea recta, pueden tener la misma dirección o dirección opuesta.

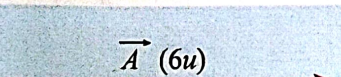


Figura 2.23

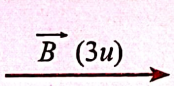


Figura 2.24

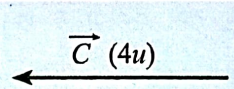


Figura 2.25

Los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores colineales. La suma de estos vectores es simplemente una suma algebraica.

Ejemplo 2.7 - Sean los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ mostrados en las figuras 2.23, 2.24 y 2.25. Se pide:

a) Hallar el vector resultante $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

$R = 6u + 3u - 4u \rightarrow R = +5u$ dirigida hacia la derecha.

b) Calcular la siguiente operación:

$\vec{A} - 2\vec{B} - 3\vec{C}$

$R = 6u - 2(3u) - 3(-4u)$

$R = +12u$ dirigida hacia la derecha.

c) Calcular la siguiente operación:

$-2\vec{A} + 3\vec{B} + 4\vec{C}$

$R = -2(6u) + 3(3u) + 4(-4u)$

$R = -19u$. Debido a que este resultado es negativo, se concluye que $\vec{R}$ se dirige hacia la izquierda.

2.7 COMPONENTES DE UN VECTOR

Un vector puede descomponerse en componentes rectangulares. La suma de las componentes debe ser igual al vector original. Existen componentes de un vector a lo largo de ejes que no son perpendiculares entre sí, sin embargo en este texto no será tratado este tema y solamente nos concentraremos en las componentes ortogonales de un vector. El vector del gráfico de la figura 2.26 mostrado tiene una magnitud A y forma un ángulo θ con el eje positivo de las x.

Para hallar las componentes a lo largo de los ejes x e y, se deben trazar líneas paralelas a los ejes y que pasen por la flecha del vector así como las líneas en guiones de color rojo que aparecen en la figura 2.26. La intersección de las líneas en guiones con los ejes dan las componentes Ax y Ay.

En la figura 2.26 la línea vertical (línea 1) es paralela al eje de las y y pasa por la flecha del vector $\vec{A}$. Luego, se traza una línea horizontal (línea 2) la cual es paralela al eje de las x. De este modo, la componente Ax se dirige desde el origen 0 hasta la intersección de la línea 1 con el eje horizontal x.

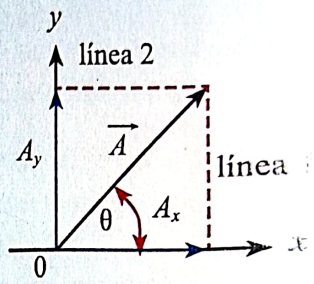


Figura 2.26

De forma similar, la componente A_y se dirige desde el origen 0 hasta la intersección de la línea 2 con el eje vertical y. Ahora expresaremos las componentes A_x y A_y en función de la magnitud del vector $\vec{A}$ y el ángulo θ

Recordando las principales funciones trigonométricas:

$$sen\,\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} \quad ; \quad cos\,\theta = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} \quad ; \quad tan\,\theta = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

Para el gráfico de la figura 2.26:

$$cos\,\theta = \frac{A_x}{A} \; ; A_x = A\,cos\,\theta \qquad sen\,\theta = \frac{A_y}{A} \; ; A_y = A\,sen\,\theta$$

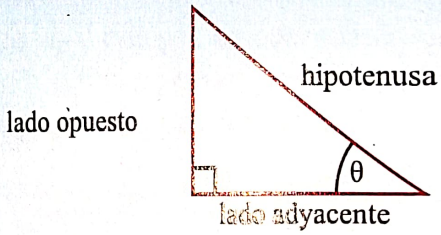


Figura 2.27

Ejemplo 2.8 - Se tiene un vector $\vec{B}$ cuya magnitud es de 10.0 unidades y forma un ángulo de 60° con el eje positivo de las x. Calcule las componentes de $\vec{B}$ a lo largo de los ejes x e y.

$B_x = Bcos\theta = 10.0cos60° = 5.00u$ (componente del vector $\vec{B}$ en la dirección x).

$B_y = Bsen\theta = 10.0sen60° = 8.66u$ (componente del vector $\vec{B}$ en la dirección y).

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtine el valor de la magnitud del vector $\vec{B}$.

$B = \sqrt{(5.0u)^2 + (8.66u)^2} = 10.0u$ **como era de esperarse.**

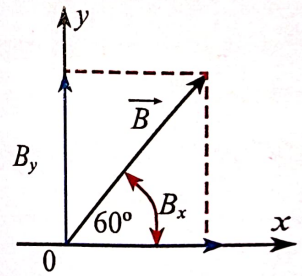


Figura 2.28

Ejemplo 2.9 - Calcule las componentes del vector $\vec{C}$ el cual tiene una magnitud de 20 unidades y una dirección de 120°.

$C_x = Ccos120° = 20cos120° = -\ 10u$

$C_y = Csen120° = 20sen120° = 17.3u$

El signo negativo en el valor de C_x indica que esa componente está en la dirección negativa del eje x. Como se muestra en la figura 2.29.

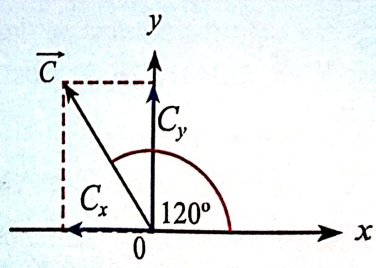


Figura 2.29

Ejemplo 2.10 - El vector $\vec{D}$ tiene una magnitud de 5 unidades y forma un ángulo de +30° con el eje positivo de las *y*, calcule las componentes rectangulares de este vector.

En este caso el ángulo que el vector forma con el eje positivo de las x es de 60°, por lo tanto:

$$D_x = D\cos 60^\circ = 5\cos 60^\circ = 2.5u \qquad D_y = D\operatorname{sen} 60^\circ = 5\operatorname{sen} 60^\circ = 4.3u$$

"Se deja que el lector realice el gráfico respectivo y que calcule la magnitud de la resultante y el ángulo que esta forma con el eje positivo de las *x*". Respuesta: $R = 5u$ y $\theta = 60.0^\circ$.

2.8 SUMA DE VECTORES POR EL MÉTODO DE LAS COMPONENTES RECTANGULARES

Este método consiste en sumar dos o más vectores usando métodos analíticos, es decir, descomponemos todos los vectores dados en sus componentes rectangulares de modo que los vectores descompuestos puedan ser sumados como vectores colineales en el eje *x* y en el eje *y*. El método consiste en colocar los vectores desde el origen sin necesidad de hacerlos a escala y luego proceder a descomponer cada uno de ellos.

Ejemplo 2.11 - Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ graficados como se muestra en la figura 2.30, hallar la resultante $\vec{A} + \vec{B}$. El vector $\vec{B}$ forma un ángulo de 30° con el eje $+x$, y el vector $\vec{A}$ un ángulo de 60° con el eje $+x$. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ han sido remplazados por sus respectivas componentes y se debe observar que A_x y B_x se pueden sumar como simples escalares; además son positivos porque están dirigidos hacia la derecha.

Se debe notar también que las componentes A_y y B_y se suman como simples escalares y son positivos porque ambas se encuentran dirigidas hacia arriba a lo largo del eje *y*. Llamaremos R_x a la suma de las componentes en el eje *x* y, R_y a la suma de las componentes a lo largo del eje de las *y*.

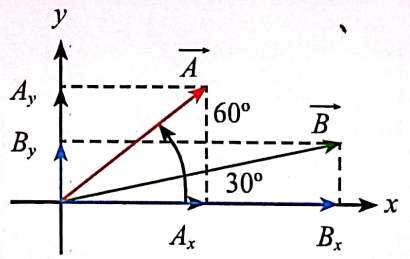


Figura 2.30

$$R_x = A_x + B_x \qquad (2.1)$$
$$R_y = A_y + B_y \qquad (2.2)$$

La magnitud de la resultante $\vec{R}$ se puede calcular usando el teorema de Pitágoras.

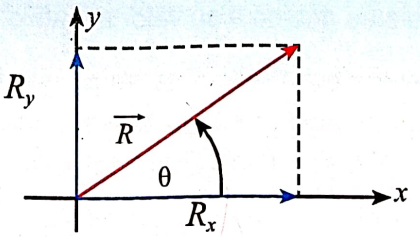


Figura 2.31

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad (2.3)$$

$$R_x = A\cos 60^\circ + B\cos 30^\circ \qquad R_y = A\operatorname{sen} 60^\circ + B\operatorname{sen} 30^\circ$$

En la figura 2.31, la tangente del ángulo θ relaciona la resultante en el eje *y*, R_y, y la resultante en el eje *x*, R_x, por lo tanto, la tangente del ángulo θ puede escribirse de la siguiente manera:

$$\tan\theta = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| \qquad \theta = \tan^{-1}\left|\frac{R_y}{R_x}\right|$$

En el caso de tener más de dos vectores el procedimiento es similar. Se debe recordar que la descomposición de vectores es "descomponer cada vector" en cada una de sus componentes.

Ejemplo 2.12 - Calcule la resultante $\vec{R}$ de los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$.

$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

$\vec{A}$: 10u, 30°

$\vec{B}$: 15u; 130°

$\vec{C}$: 5u; 250°

Observe que se han graficado los ángulos que los vectores forman con el eje x más próximo, como se muestra en la figura 2.32 (a).

En la figura 2.32 (a) se muestra los tres vectores que se van a sumar.

En la figura 2.32 (b), los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ están con línea punteada, ya que han sido remplazados por sus componentes a lo largo de los ejes x y y.

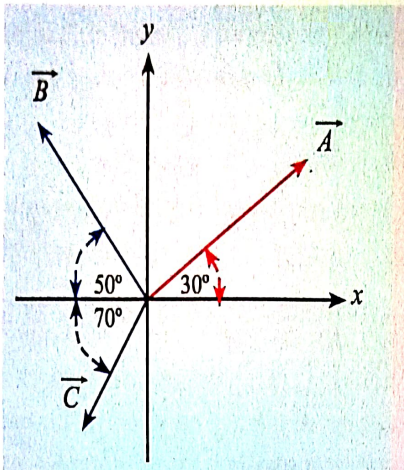


Figura 2.32 (a)

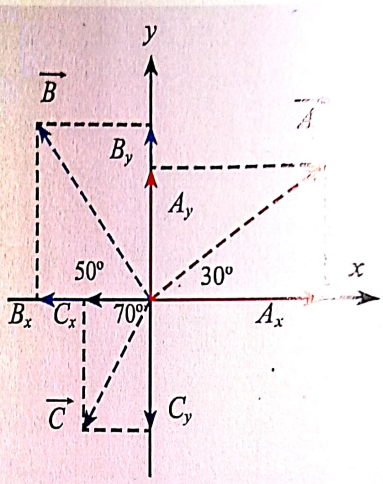


Figura 2.32 (b)

$R_x = A\cos 30° - B\cos 50° - C\cos 70° = 10\cos 30° - 15\cos 50° - 5\cos 70° \Rightarrow R_x = -2.7u$

$R_y = A\operatorname{sen} 30° + B\operatorname{sen} 50° - C\operatorname{sen} 70° = 10\operatorname{sen} 30° + 15\operatorname{sen} 50° - 5\operatorname{sen} 70° \Rightarrow R_y = 11.8u$

$$\tan\theta = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{11.8}{-2.7}\right| = 4.37 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(4.37) \Rightarrow \theta = 77.1°$$

Aplicando el teorema de Pitágoras se tiene:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{2.7^2 + 11.8^2} = 12.1u$$

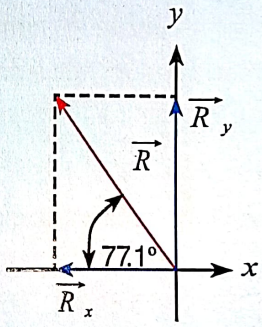


Figura 2.33

OBSERVACIONES:

1. Al encontrar *tan* θ no se consideró el signo de R_x, sino que se procedió a graficar el vector $\vec{R}_x$ hacia la izquierda debido a su valor negativo.
2. El ángulo encontrado θ es aquel que forma el vector $\vec{R}$ con el eje x más cercano. En este caso es de 77.1°; sin embargo también es correcto afirmar que el ángulo que forma el vector $\vec{R}$ es 180° - 77.1° = +102.9°. Este ángulo es el que forma $\vec{R}$ con el eje positivo de las x.

2.9 LEY DEL COSENO APLICADA A LA SUMA DE VECTORES

Cuando se tienen que sumar dos vectores a veces es conveniente usar la ley del coseno en lugar del método de las componentes.

Se va a deducir la resultante de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que forman un ángulo θ entre ellos.

Se encuentra la resultante usando el método del paralelogramo y se descompone el vector $\vec{B}$ en su componente horizontal $B\cos\theta$, luego se aplica el teorema de Pitágoras como se ve a continuación en la Figura 2.34.

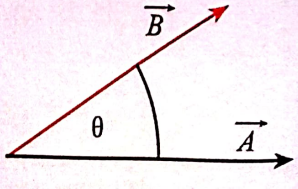


Figura 2.34

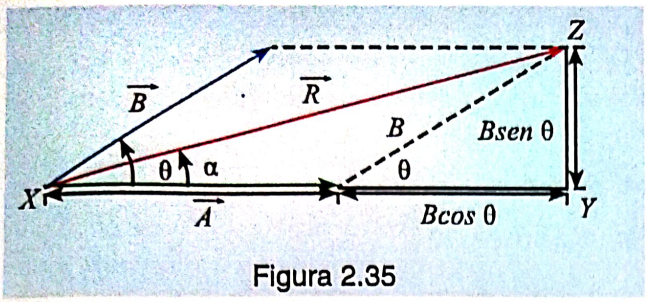


Figura 2.35

Para el triángulo rectángulo XYZ, R es la hipotenusa, $Bsen\theta$ es un cateto y $(A+Bcos\ \theta)$ es el otro cateto. Se puede aplicar el teorema de Pitágoras para hallar R.

$$R = \sqrt{(A+Bcos\theta)^2 + (Bsen\theta)^2}$$

Resolviendo: $R = \sqrt{A^2+B^2cos^2\theta + 2ABcos\theta + B^2sen^2\theta}$

Agrupando: $R = \sqrt{A^2 + B^2\,(cos^2\theta + sen^2\theta) + 2ABcos\theta}$

Por trigonometría se conoce que: $cos^2\theta + sen^2\theta = 1$

$$R = \sqrt{A^2+B^2 + 2ABcos\theta} \qquad (2.4)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El ángulo que la resultante forma con el vector $\vec{A}$ es α el cual se calcula con la tangente de α.

$$tan\ \alpha = \frac{Bsen\theta}{A + Bcos\theta} \qquad (2.5)$$

30°

Ejemplo 2.13 - Sobre una caja que está en el suelo, se aplican dos fuerzas como se muestra en la figura 2.36. Tanto $\vec{F}$ como $\vec{Q}$ se hallan sobre el mismo plano. Calcule la fuerza resultante y su dirección.

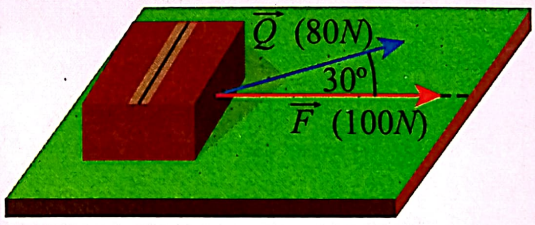


Figura 2.36

$$F_R = \sqrt{F^2+Q^2 + 2FQcos\theta}$$

$$F_R = \sqrt{100^2+80^2+2(80)(100)cos30°} = 173.9\ N$$

El ángulo que la fuerza resultante forma con el eje x es:

$$tan\ \alpha = \frac{Qsen\theta}{F+Qcos\theta}$$ Donde θ es igual a 30°

$$tan\ \alpha = \frac{80sen30°}{100+80cos30°} = 0.236$$

$$\alpha = tan^{-1}0.236 \rightarrow \alpha = 13.3°$$

Ejemplo 2.14 - Calcule la suma de los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ mostrados en la figura 2.37.

La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, por lo tanto, el ángulo entre los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ es 120°, de modo que se puede aplicar la ley del coseno para hallar la resultante, usando $\theta = 120°$ en la ecuación (2.4)

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQcos\theta} = \sqrt{12^2 + 8^2 + 2(12)(8)cos120°} = 10.6\ N$$

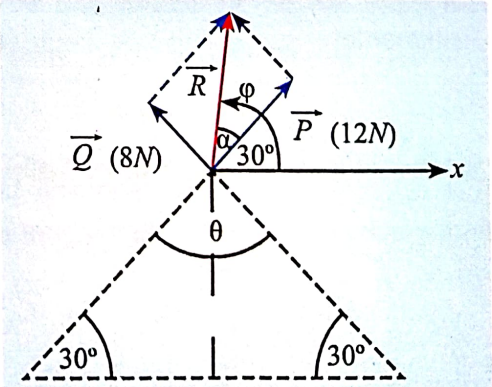


Figura 2.37

Para hallar el ángulo que $\vec{R}$ forma con el vector $\vec{P}$, aplicamos la ecuación 2.39.

$$\tan\alpha = \frac{Q\,sen\theta}{P+Q\cos\theta} \rightarrow \tan\alpha = \frac{8\,sen120^\circ}{12+8\cos120^\circ} \rightarrow \alpha = 40.9^\circ$$

Para hallar el ángulo que el vector $\vec{R}$ forma con el eje positivo de las x, debemos añadirle el ángulo que $\vec{P}$ forma con el eje positivo de las x que es de 30° como puede observarse en la figura 2.37

$$\varphi = 40.9^\circ + 30^\circ \qquad \text{Por lo tanto: } \varphi = 70.9^\circ$$

Donde $\varphi = 70.9^\circ$, es el ángulo que el vector $\vec{R}$ forma con el eje positivo de las x, como puede observarse en la figura 2.37.

2.10 LEY DEL SENO

Utilizando la misma figura que aquella para deducir la ley del coseno (figura 2.38), podemos deducir la ley del seno.

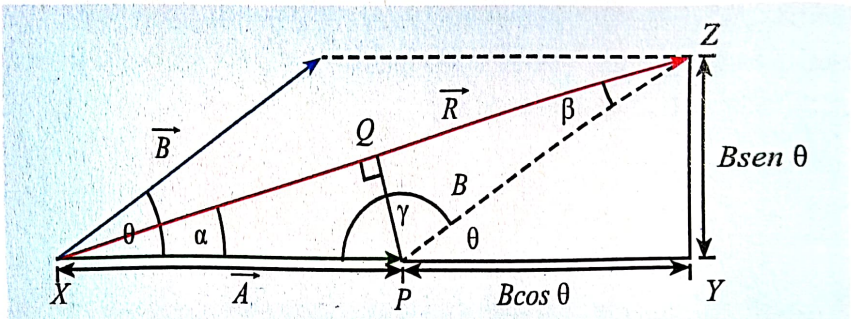


Figura 2.38

Del triángulo XZY se observa que: $Bsen\theta = Rsen\alpha$;

$$\frac{R}{sen\theta} = \frac{B}{sen\alpha}$$

Del triángulo XPQ: $(\overline{PQ}) = Asen\alpha$

Del triángulo ZPQ: $(\overline{PQ}) = Bsen\beta$

$\gamma = 180^\circ - \theta$

Igualando: $sen\gamma = sen(180^\circ - \theta) = sen\theta$

$$Bsen\beta = Asen\alpha$$

$$\frac{B}{sen\alpha} = \frac{A}{sen\beta} \qquad (2.6)$$

Finalmente:

$$\frac{B}{sen\alpha} = \frac{A}{sen\beta} = \frac{R}{sen\gamma} \qquad (2.7)$$

A la ecuación (2.7) se la denomina **LEY DEL SENO**. Esta expresión nos permite calcular los lados o los ángulos del triángulo XPZ de la figura (2.38).

Ejemplo 2.15 - Con relación al ejemplo 2.14 de la figura 2.37, se calculará el ángulo α usando la ley del seno.

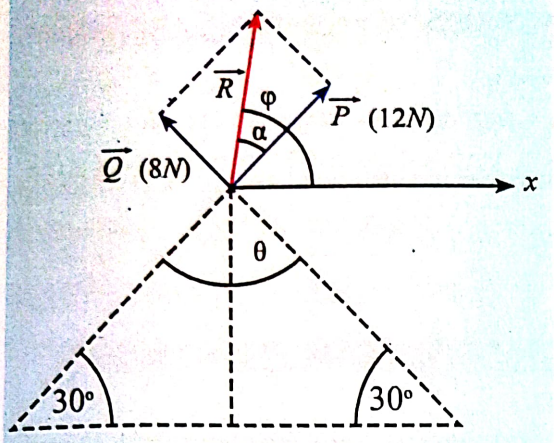


Figura 2.39

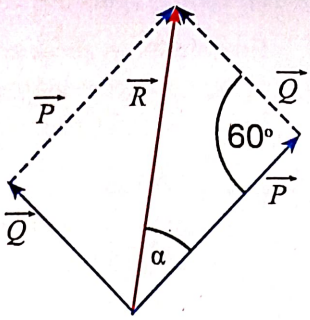


Figura 2.40

El ángulo comprendido entre $\vec{P}$ y $\vec{Q}$ es 120°, por lo tanto, los 60° que se indican en la figura 2.40 corresponden al ángulo para completar 180°.

La suma de los cuatro ángulos internos del cuadrilátero es igual a 360°; y, la suma de 3 ángulos internos de un triangulos es igual a 180°.

Al aplicar la ley del seno:

$$\frac{Q}{sen\alpha} = \frac{R}{sen60^\circ} \qquad sen\alpha = \frac{Q}{R}\, sen60^\circ \qquad sen\alpha = \frac{8}{10.6}\, sen60^\circ$$

$$sen\alpha = 0.654 \qquad \alpha = sen^{-1}(0.654)$$

$\alpha = 40.8^\circ$ lo cual coincide con la respuesta del ejemplo 2.14.

2.11 RESTA DE VECTORES

La resta de vectores puede convertirse en una suma de vectores que ya se ha tratado anteriormente. Si se desea realizar la operación $\vec{A} - \vec{B}$, esto puede escribirse como $\vec{A} + (-\vec{B})$. Esto implica que la resta no es más que una suma de $\vec{A}$ con el vector $-\vec{B}$.

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ calcule el vector $\vec{A} - \vec{B}$ (Figura 2.41)

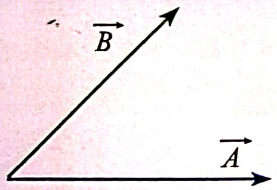


Figura 2.41

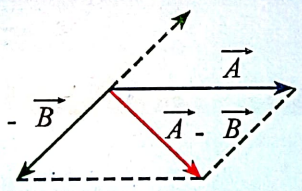


Figura 2.42

Primero se dibuja el vector $\vec{A}$ igual que en el gráfico de la figura 2.41 y se procede a dibujar el vector $-\vec{B}$ como se observa a continuación en la figura 2.42:

El vector $\vec{A} - \vec{B}$ es la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $-\vec{B}$ y puede ser calculado por cualquiera de los métodos usados para sumar vectores.

Es importante notar que con una variante en la ley del coseno se puede calcular la resta de dos vectores, como sigue:

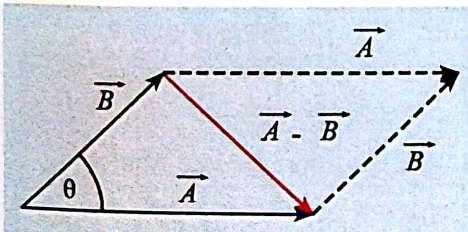


Figura 2.43

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}$$ **Resta de vectores**

Este resultado no debe confundirse con aquel para calcular la resultante de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Esto es:

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta}$$ **Suma de vectores**

Ejemplo 2.17 - Detemine la magnitud de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se muestran a continuación:

$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$

El módulo del vector $\vec{A}$ es: $A = \sqrt{3^2+4^2+5^2} = 5\sqrt{2}$ y el módulo del vector $\vec{B}$ es: $B = \sqrt{6^2+8^2+4^2} = 2\sqrt{29}$

Ejemplo 2.18 - Dada la figura mostrada, escriba los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ en términos de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

$\vec{V}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}$
$\vec{V}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 0\hat{k}$

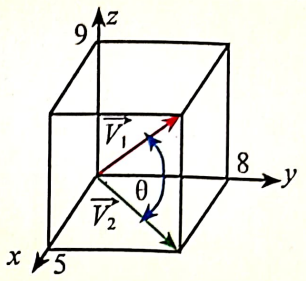


Figura 2.48

2.15 VECTOR UNITARIO EN 3 DIMENSIONES

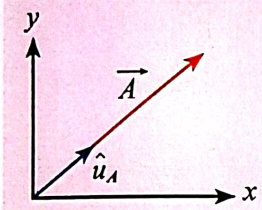


Figura 2.49

El vector unitario ($\hat{u}_A$) es aquel que tiene magnitud igual a 1, conserva la dirección del vector $\vec{A}$ y se define como el vector $\vec{A}$ dividido para su magnitud.

$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A}$, $\hat{u}_A$ se lee: vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$. (Figura 2.49)

Ejemplo 2.19 - Determine el vector unitario del vector $\vec{A}$ mostrado en la figura.

Un vector se puede escribir en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$. Para este ejemplo el vector $\vec{A}$ queda definido por:

$$\vec{A} = 1\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

La magnitud se calcula aplicando la ecuación 2.9. $\vec{A} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$

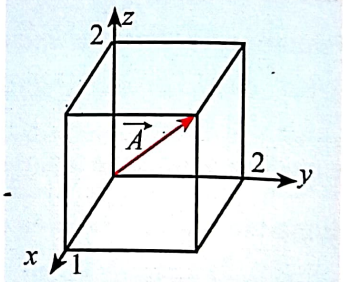


Figura 2.50

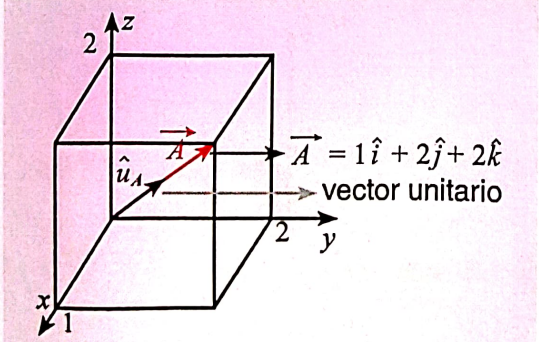


Figura 2.51

A fin de visualizar mejor, en la figura 2.51 se ha graficado el vector $\vec{A}$ y su vector unitario $\hat{u}_A$.

El vector unitario de $\vec{A}$ ($\hat{u}_A$) es:

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{1\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

$$\hat{u}_A = \frac{1}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

Queda para el lector comprobar que la magnitud del vector unitario ($\hat{u}_A$) es igual a 1

2.16 SUMA DE VECTORES EN 3 DIMENSIONES

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ que se muestran en la figura 2.52:

$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

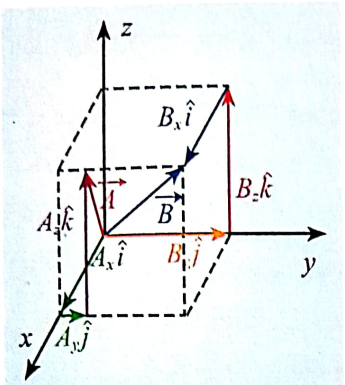


Figura 2.52

La suma de vectores $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ se realiza sumando sus componentes en x, en y y en z, por lo tanto:

$$\vec{R} = (A_x + B_x)\hat{i} + (A_y + B_y)\hat{j} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

De forma general para mas de dos vectores:

$$\vec{R} = (A_x + B_x + C_x + \ldots)\hat{i} + (A_y + B_y + C_y + \ldots)\hat{j} + (A_z + B_z + C_z + \ldots)\hat{k} \quad (2.10)$$

Ejemplo 2.20 - Dados los vectores: $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} - 8\hat{j} + 1\hat{k}$ calcule $\vec{A} + \vec{B}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (3\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) + (6\hat{i} - 8\hat{j} + 1\hat{k})$$

Sumando los $\hat{i}$ y los $\hat{j}$

$$\vec{A} + \vec{B} = (3+6)\hat{i} + (4 - 8)\hat{j} + (3 + 1)\hat{k} = 9\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$$

Ejemplo 2.21 - Para los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} - 8\hat{j}$.

Calcule el vector: $2\vec{A} + 3\vec{B}$

Primero calculamos el vector $2\vec{A}$ y el vector $3\vec{B}$, lo cual queda:

$$2\vec{A} = 2(3\hat{i} + 4\hat{j}) \quad \text{y} \quad 3\vec{B} = 3(6\hat{i} - 8\hat{j})$$

y multiplicando los escalares 2 y 3 por cada uno de los vectores: $2\vec{A} = (6\hat{i} + 8\hat{j})$ y $3\vec{B} = (18\hat{i} - 24\hat{j})$

sumando los dos vectores queda: $2\vec{A} + 3\vec{B} = (6\hat{i} + 8\hat{j}) + (18\hat{i} - 24\hat{j})$

El resultado final es: $2\vec{A} + 3\vec{B} = 24\hat{i} - 16\hat{j}$

Ejemplo 2.22 - Considerando los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ de la figura 2.53.

Determine $\vec{C} + \vec{D}$

Solución

Observando la figura definimos el vector $\vec{C} = (\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k})$ y el vector $\vec{D} = (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$.

$$\vec{C} + \vec{D} = (\hat{i} + 0\hat{j} + 2\hat{k}) + (\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 2\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}$$

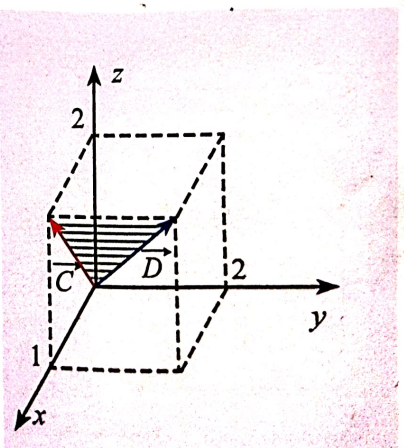


Figura 2.53

Ejemplo 2.23 - Dados 2 vectores $\vec{V}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 0\hat{k}$, calcular $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$.

La suma en función de vectores unitarios es muy sencilla: se suman las componentes en x, luego las componentes en y, y finalmente las componentes en z. $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 = 10\hat{i} + 16\hat{j} + 9\hat{k}$

Ejemplo 2.24 - Dados 2 vectores $\vec{V}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 0\hat{k}$, calcular $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$.

$$\vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 9\hat{k} \qquad \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = 9\hat{k}$$

Ejemplo 2.25 - Dados 2 vectores $\vec{V}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 0\hat{k}$, calcular $3\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2$.

Para obtener el vector $3\vec{V}_1$ se multiplica el escalar 3 por cada una de las componentes del vector. Se hace lo mismo para obtener el vector $-2\vec{V}_2$

$$3\vec{V}_1 = 15\hat{i} + 24\hat{i} + 27\hat{k}$$

$$-2\vec{V}_2 = -10\hat{i} - 16\hat{j} + 0\hat{k}$$

Se puede obtener la operación $3\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2$ como la suma del vector $3\vec{V}_1$ más el vector $(-2\vec{V}_2)$. Es decir:

$$3\vec{V}_1 + (-2\vec{V}_2) = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 27\hat{k}$$

2.17 PRODUCTO ESCALAR O PRODUCTO PUNTO ENTRE VECTORES

En la Física se conocen dos tipos de multiplicación de vectores. Uno es el producto escalar, conocido también como producto punto de vectores cuyo resultado es un escalar; y el otro tipo es el producto vectorial, conocido también como producto cruz de vectores y su resultado es un vector. Por el momento se estudiará el producto punto de vectores.

Suponga que se tiene dos vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$. El producto punto se define como:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \qquad (2.11)$$

donde $|\vec{A}|$ es el módulo del vector $\vec{A}$ (también se puede representar por: A); $|\vec{B}|$ el módulo del vector $\vec{B}$ (también se puede representar por: B) y θ el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Estos vectores están representados en la figura 2.54.

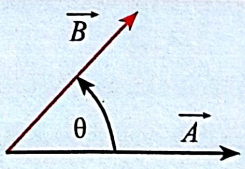


Figura 2.54

2.17.1 PRODUCTO PUNTO DE VECTORES UNITARIOS ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$)

Los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ tiene magnitud 1 y forman entre sí 90°. Por convención, el vector unitario $\hat{i}$ está a lo largo del eje x, el vector unitario $\hat{j}$ a lo largo del eje y y $\hat{k}$ a lo largo del eje z.

Debido a que los vectores $(\hat{i} \cdot \hat{i})$ son paralelos entre sí, el ángulo entre dos vectores iguales es igual a cero. Además, el coseno de 0 es igual a 1, por lo tanto $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$. Lo mismo sucede con $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ y $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$.

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = (1)(1)\cos 0° = 1 \qquad (2.12)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = (1)(1)\cos 0° = 1 \qquad (2.13)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{k} = (1)(1)\cos 0° = 1 \qquad (2.14)$$

Ahora se va a calcular el producto punto de dos vectores unitarios ($\hat{i} \cdot \hat{j}$) que forman 90° entre si. Debe recordarse que los vectores unitarios tienen magnitud 1 y que el $cos90° = 0$; por lo tanto, el producto punto $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$. Lo mismo sucede con $\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ y $\hat{k} \cdot \hat{i} = 0$.

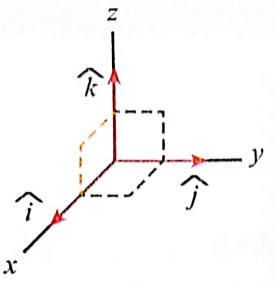


Figura 2.55

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = (1)(1)cos90° = 0 \quad (2.15)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{i} = (1)(1)cos90° = 0 \quad (2.16)$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = (1)(1)cos90° = 0 \quad (2.17)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{j} = (1)(1)cos90° = 0 \quad (2.18)$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = (1)(1)cos90° = 0 \quad (2.19)$$

$$\hat{k} \cdot \hat{i} = (1)(1)cos90° = 0 \quad (2.20)$$

De las 6 últimas ecuaciones se observa que el producto punto es conmutativo, y en general se puede decir que:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \quad (2.21)$$

2.17.2 PRODUCTO ESCALAR O PUNTO ENTRE LOS VECTORES $\vec{A}$ Y $\vec{B}$

Dados los vectores: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ se desarrolla como se indica a continuación.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \cdot (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k})$$

Se procede a multiplicar término a término.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x(\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_xB_y(\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_xB_z(\hat{i} \cdot \hat{k}) + A_yB_x(\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_yB_y(\hat{j} \cdot \hat{j}) + A_yB_z(\hat{j} \cdot \hat{k}) + A_zB_x(\hat{k} \cdot \hat{i}) + A_zB_y(\hat{k} \cdot \hat{j}) + A_zB_z(\hat{k} \cdot \hat{k})$$

Recordando que: $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1, \hat{j} \cdot \hat{j} = 1, \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$ y que $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{i} = \hat{k} \cdot \hat{j} = 0$, la ecuación anterior queda:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad (2.22)$$

Así, el producto escalar o producto punto de dos vectores es igual a un escalar.

Ejemplo 2.26 - Dados los vectores $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ y $\vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$ calcule el producto punto entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución: Aplicando la ecuación 2.22, $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y$ el producto punto entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3 \times 6) + (4 \times 8) \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = 50$$

Ejemplo 2.27 - Calcule el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

$$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j};\ \vec{B} = 6\hat{i} + 8\hat{j}$$

Solución: En el ejemplo **2.26** se encontró que el producto punto entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual a 50.

La magnitud del vector $\vec{A}$ es $A = \sqrt{3^2+4^2} = 5$; y, para el vector $\vec{B}$ es $B = \sqrt{6^2+8^2} = 10$

Sabiendo que por definición: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$, se debe despejar $\cos\theta$, quedando:

$$\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

Reemplazando los valores ya calculados: $\cos\theta = \frac{50}{5 \times 10} = 1$

Por lo tanto, el ángulo θ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es de 0°, ya que $cos0° = 1$. De esta manera podemos concluir que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son vectores paralelos. También se puede observar que el vector $\vec{B}$ es igual a $2\vec{A}$.

Ejemplo 2.28 - El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 4 unidades y forma un ángulo de 0° con el eje positivo de la x. El vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de 6 unidades y forma un ángulo de 60° con el eje positivo de las x. Calcule el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B} = ?$ Usar $(cos60° = 0.5)$

Solución: Se puede llegar a la respuesta aplicando la definición del producto punto dada en la ecuación 2.11.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta°$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 \times 6 \times cos60°$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 12 \text{ unidades}$$

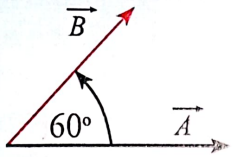


Figura 2.56

Ejemplo 2.29 - El ángulo que el vector $\vec{C}$ forma con el eje positivo de las x es de 15° y su magnitud es de 8 unidades. El vector $\vec{D}$ forma un ángulo de 75° con el eje positivo de las x y su magnitud es de 10 unidades. Calcule el producto punto $\vec{C} \cdot \vec{D} = ?$ Usar $(cos60°) = 0.5$

Solución: En la figura 2.59 están graficados los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ con sus respectivos ángulos con respecto al eje positivo de las x.

Se puede observar en la figura que el ángulo entre los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ es de 60°.

Aplicando la ecuación 2.11; $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\theta°$ y remplazando $\vec{A}$ por $\vec{C}$ y $\vec{B}$ por $\vec{D} \Rightarrow \vec{C} \cdot \vec{D} = CD\, cos60°$

$\vec{C} \cdot \vec{D} = 8 \times 10 \times 0.5 = 40$ unidades

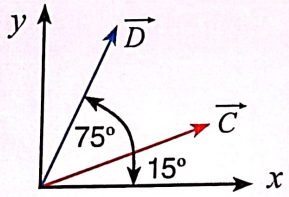


Figura 2.57

Ejemplo 2.30 - Calcule $\vec{A} \cdot \vec{A}$

$\vec{A} \cdot \vec{A} = A\,(A)\, cos0° = A^2$

Esto significa que cualquier vector multiplicado escalarmente por sí mismo da como resultado su módulo elevado al cuadrado.

Ejemplo 2.31 - Calcule el producto punto de los siguientes vectores:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k} \quad y \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

Solución

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k})$$

Al multiplicar se obtiene 9 términos, de los cuales, 6 se hacen 0 pues serían la multiplicación de vectores unitarios que forman 90° entre sí. Además, se debe recordar que la multiplicación escalar de un vector unitario por sí mismo es igual a 1.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Ejemplo 2.32 - Dado los vectores $\vec{A} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{k}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}$,

a) Calcule el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 2 \times (-3) + 4 \times 1 + (-6 \times 4) = -26$$

b) Calcule el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$ Recordando que $\vec{A} \cdot \vec{B} = -26$

Calculando la magnitud del vector $\vec{A}$:

$$A = \sqrt{2^2 + 4^2 + (-6)^2} = 7.48$$

y, calculando la magnitud del vector $\vec{B}$:

$$B = \sqrt{3^2 + 1^2 + 4^2} = 5.1$$

$$\text{Como: } \cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{AB}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-26}{7.48 \times 5.1}\right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}(-0.68) \Rightarrow \theta = 133^0$$

Ejemplo 2.33 - En la figura 2.58 se muestran dos vectores, $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$. Se pide:

a) Determinar el producto punto entre estos dos vectores.

b) Determinar el ángulo θ entre los dos vectores, usando el producto punto.

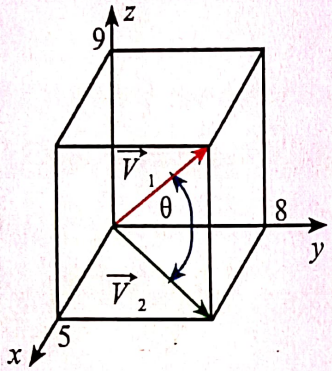


Figura 2.58

a) Determinar el producto punto entre estos dos vectores.

$\vec{V}_1 = 5\hat{i} + 8\hat{j} + 9\hat{k}; \vec{V}_2 = 5\hat{i} + 8\hat{j} - 0\hat{k}$

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (5 \times 5) + (8 \times 8) = 89$

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 89$

b) Determinar el ángulo θ entre los dos vectores, usando el producto punto

$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 89$

$V_1 = \sqrt{5^2 + 8^2 + 9^2} = 13$

$V_2 = \sqrt{5^2 + 8^2 + 0^2} = 9.4$

$$\cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{V_1 V_2} = \frac{89}{13 \times 9.4}$$

$\cos\theta = 0.73 \Rightarrow \theta = 43.3^\circ$

2.18 INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL PRODUCTO ESCALAR

2.18.1 PROYECCIÓN ESCALAR DE UN VECTOR SOBRE OTRO

A partir de la definición del producto escalar o producto punto, se puede entender el significado geométrico este producto de vectores. $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$

$$\text{Esta ecuación puede escribirse como: } B\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$$

En la figura 2.59 se observa el significado de $B\cos\theta$.

El recuadro amarillo de la figura 2.59 representa la luz que apunta hacia abajo sobre el vector $\vec{B}$, de modo que la sombra que se proyecta es la línea en rojo.
Si desde la parte superior (la región PQ) se envía luz hacia el vector $\vec{B}$, se proyectará sobre el vector $\vec{A}$ una sombra que en la figura 2.59 se representa por medio del segmento señalado por $B\cos\theta$. Ahora, desde que:

$$B\cos\theta = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$$

2.12 VECTORES UNITARIOS ORTOGONALES EN TRES DIMENSIONES

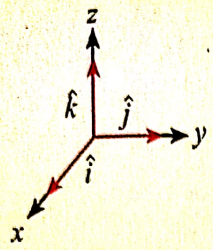


Figura 2.44

En este tema se va a revisar un sistema de ejes perpendiculares en el espacio. Para el plano denominamos los ejes con x e y. Se añadirá un tercer eje z para ubicar vectores en el espacio.

Los vectores $\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$ son los vectores unitarios a lo largo de los ejes x, y, z respectivamente, tienen magnitud igual a 1 y sirven para dar la dirección de los vectores en los ejes x, y, z.

2.13 REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR EN TRES DIMENSIONES

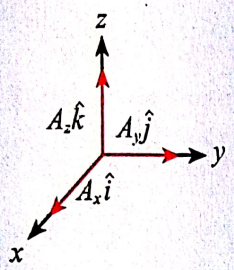


Figura 2.45

Un vector $\vec{A}$ puede ser representado por medio de sus componentes asociados con sus vectores unitarios ($\hat{i}$, $\hat{j}$, y $\hat{k}$). Por ejemplo, si se escribe:

$A_x\hat{i}$ representa la componente del vector $\vec{A}$ en la dirección x.

$A_y\hat{j}$ representa la componente del vector $\vec{A}$ en la dirección y.

$A_z\hat{k}$ representa la componente del vector $\vec{A}$ en la dirección z.

Por lo tanto, cualquier vector puede ser representado en términos de sus componentes rectangulares con sus respectivos vectores unitarios: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \qquad (2.8)$$

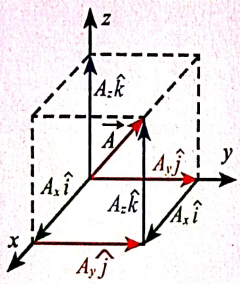


Figura 2.46

Ejemplo 2.16 - Grafique el vector: $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$

Como $A_x\hat{i}$, $A_y\hat{j}$, $A_z\hat{k}$ son componentes del vector $\vec{A}$ para graficar dicho vector se utiliza el método gráfico del polígono colocando cada componente del vector una a continuación de otra, como se observa en la figura 2.46.

2.14 MAGNITUD DE UN VECTOR EN TRES DIMENSIONES

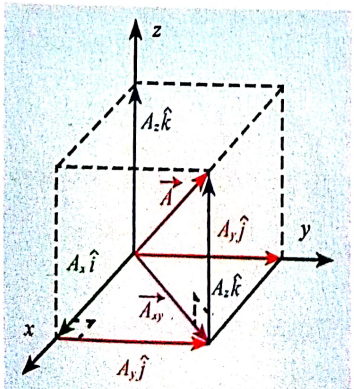


Figura 2.47

Las componentes $A_x\hat{i}$ y $A_y\hat{j}$ son vectores perpendiculares y componentes del vector $\vec{A}_{xy}$ que se encuentra en el plano xy; por lo tanto, la magnitud del vector $\vec{A}_{xy}$ es:

$$|\vec{A}_{xy}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

Los vectores $\vec{A}_{xy}$ y $\vec{A}_z$ son componentes perpendiculares del vector resultante $\vec{A}$; por lo tanto, la magnitud del vector $\vec{A}$ es:

$$|\vec{A}| = \sqrt{(A_{xy})^2 + (A_z)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{A_x^2 + A_y^2}\right)^2 + (A_y)^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad (2.9)$$

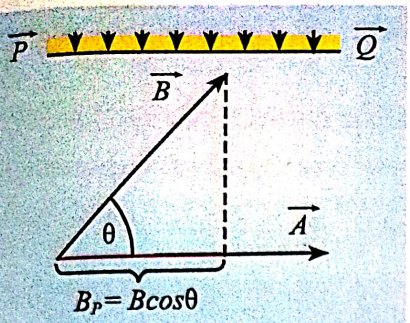


Figura 2.59

se concluye que la **proyección escalar del vector $\vec{B}$ sobre el vector $\vec{A}$** está dado por: $B_P = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{A}$.

De esta última expresión se observa que $\frac{\vec{A}}{A}$ es el vector unitario en la dirección de $\vec{A}$. Por lo tanto se puede concluir que la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$ es igual al producto punto entre el vector $\vec{B}$ y el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

$B_P = \vec{B}\cdot\hat{u}_B$ = **proyección escalar** del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$. (2.23)

Por otro lado, la **proyección escalar** del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$ estará dada por:
$A_P = \vec{A}\cdot\hat{u}_B$ = proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$. (2.24)

Ejemplo 2.34 - Se tiene dos vectores: $\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ y $\vec{B} = 2\hat{j}$. Calcule la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$.

Solución: La proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$ está dada por: $A_P = \vec{A}\cdot\hat{u}_B$. Por lo tanto se debe hallar el vector $\hat{u}_B$ y realizar el producto punto con el vector $\vec{A}$.

Se conoce el vector $\vec{B}$ y por tanto su módulo es simplemente igual a 2.

El vector unitario de $\vec{B}$.

$$\hat{u}_B = \frac{\vec{B}}{B} = \frac{2\hat{j}}{2} = \hat{j}$$

La proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$ está dada por:

$$A_P = \vec{A}\cdot\hat{u}_B = (3i + 4j)\cdot\hat{j} = 4 \text{ unidades}$$

Ejemplo 2.35 - Calcule la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son los mismos del ejemplo 2.34.

Solución: En este caso se debe hallar primero el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$, sabiendo que el módulo del vector $\vec{A}$ es 5.

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{3\hat{i} + 4\hat{j}}{5} = \frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}$$

la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$ está dada por:

$$B_P = \vec{B}\cdot\hat{u}_A = 2\hat{j}\cdot\left(\frac{3}{5}\hat{i} + \frac{4}{5}\hat{j}\right) = \frac{8}{5} \text{ unidades}$$

Se debe hacer énfasis en el sentido que la proyección de un vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$, no es igual al producto punto de $\vec{B}$ y $\vec{A}$, sino que es igual al producto punto entre el vector $\vec{B}$ y el vector unitario del vector $\vec{A}$.

$$B_P = \vec{B}\cdot\hat{u}_A$$

2.19 PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ DE VECTORES

Cuando se aplica el producto cruz a dos vectores, el resultado es otro vector. Este nuevo vector es perpendicular a los vectores que se multiplican.

Su magnitud se define como:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB\,sen\,\theta \qquad (2.25)$$

donde θ es el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

La magnitud del producto cruz representa geométricamente el área del paralelogramo que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

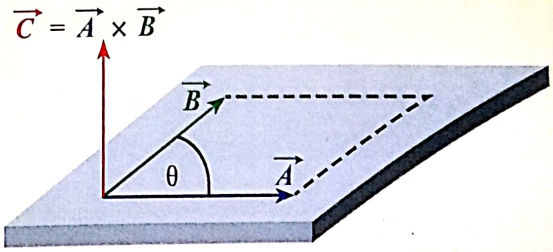


Figura 2.60

Para determinar la dirección del producto cruz se utiliza la regla de la mano derecha.

Por ejemplo, se desea conocer la dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

1. Se coloca la mano derecha con los dedos apuntando en la dirección del primer vector, en este caso, en dirección del vector $\vec{A}$, y luego se dobla la mano hacia el vector $\vec{B}$; el pulgar extendido indica la dirección del vector $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$, como se indica en la figura 2.62.

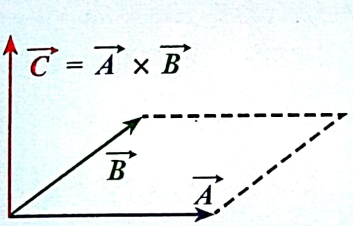


Figura 2.61

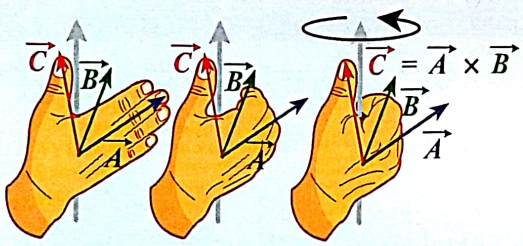


Figura 2.62

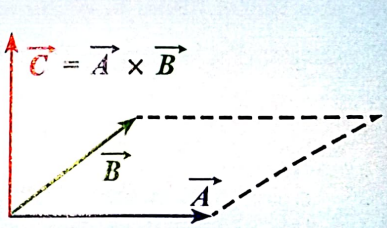


Figura 2.63

Para hallar la dirección del vector $\vec{C}$, los dedos giran de $\vec{A}$ hacia $\vec{B}$; por lo tanto, el pulgar indica la dirección de $\vec{C}$.

A continuación se mostrará que el módulo del vector $\vec{A} \times \vec{B}$ representa el área del paralelogramo formado por estos dos vectores. Suponga que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se hallan en el plano del papel.

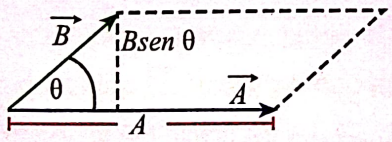


Figura 2.64

Se observa que el producto $ABsen\theta$ es el área del paralelogramo y tambien es igual $|\vec{A} \times \vec{B}|$

El área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual al producto de la base (A) multiplicado por la altura que es $Bsen\theta$. Es decir, el área del paralelogramo sería:

$$Area = ABsen\,\theta$$

Este último resultado no es otra cosa que la magnitud del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$

Así: Área del paralelogramo $= |\vec{A} \times \vec{B}| = ABsen\,\theta \qquad (2.26)$

FORMA DE CALCULAR EL PRODUCTO VECTORIAL $\vec{A} \times \vec{B}$.

Sean los vectores $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$

Con el fin de hallar el producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ se usa el **método de determinantes.**

Se colocan los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ en la primera fila; en la segunda fila se coloca las componentes del primer vector, esto es, del vector $\vec{A}$; finalmente, en la tercera fila se coloca las componentes del segundo vector, esto es, del vector $\vec{B}$. Este arreglo queda de la siguiente manera.

Como se puede observar, el resultado es un vector. Ahora, la magnitud de este vector representa el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) - \hat{j}\,(A_xB_z - A_zB_x) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x)$$

Como se puede observar, el resultado es un vector. Ahora, la magnitud de este vector representa el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Ejemplo 2.35- Sean los vectores: $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ $\qquad$ $\vec{B} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

Calcule el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y el vector $\vec{A} - \vec{B}$

Solución: Aunque estos vectores están en el espacio, se puede graficar con el fin de observar los tres vectores y resolver el problema. Debe recordarse que el producto $\vec{A} \times \vec{B}$ da como resultado el vector $\vec{C}$, el cual es perpendicular tanto al vector $\vec{A}$ como al vector $\vec{B}$ y su módulo es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para hallar el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$, se debe dividir para 2 el área del paralelogramo (Todo paralelograma esta formado por 2 triángulos idénticos). Ver figura.

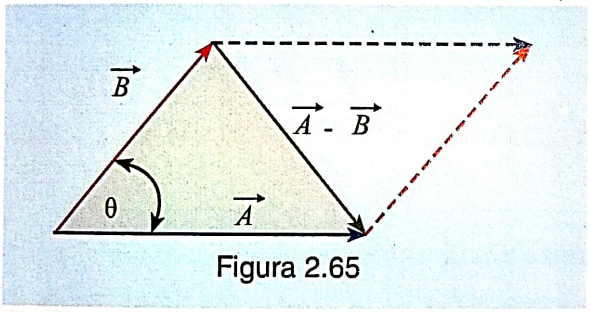


Figura 2.65

Primero se realizará el producto $\vec{A}\times\vec{B}$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2-6)\,\hat{i} - (2-9)\,\hat{j} + (4+6)\,\hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -8\,\hat{i} + 7\,\hat{j} + 10\,\hat{k}$$

El módulo de este vector es el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, entonces:

$$|\vec{A} \text{ y } \vec{B}| = \sqrt{(-8)^2+(7)^2+(10)^2} = 14.6\,u^2$$

Por lo tanto, el área del mencionado triángulo será: $A_\Delta = \frac{1}{2}(14.6) = 7.3\,u^2$

2.20 PRODUCTO TRIPLE ESCALAR

El producto triple escalar consiste en realizar la siguiente operación:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C} \qquad (2.27)$$

donde los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ no están en un plano sino en el espacio.

Suponga que:

$$\vec{A} = A_x\,\hat{i} + A_y\,\hat{j} + A_z\hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x\,\hat{i} + B_y\,\hat{j} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{C} = C_x\,\hat{i} + C_y\,\hat{j} + C_z\hat{k}$$

Cuando se realiza el producto cruz, entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$, da como resultado un vector. Por lo tanto este último vector al multiplicarse escalarmente con el vector $\vec{C}$ da como resultado un escalar.

Una forma de calcular este producto triple escalar es la siguiente:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\hat{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

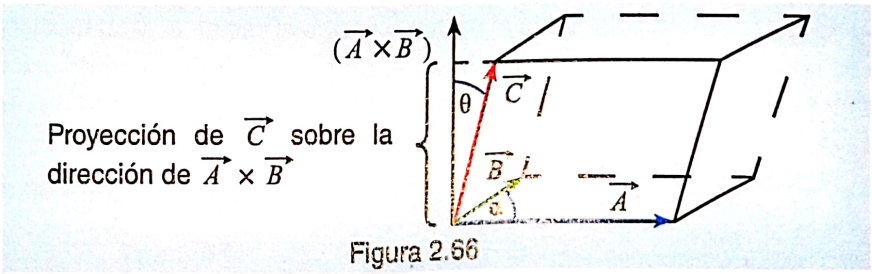
Luego, este resultado debe multiplicarse (escalarmente) con el vector $\vec{C}$. Por lo tanto:

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = (A_yB_z - A_zB_y)C_x - (A_xB_z - A_zB_x)C_y + (A_xB_y - A_yB_x)C_z$$

Este resultado puede ser obtenido mediante una sola operación.

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = (A_yB_z - A_zB_y)C_x - (A_xB_z - A_zB_x)C_y + (A_xB_y - A_yB_x)C_z$$

Se observa que el resultado obtenido es el mismo. Una aplicación del producto triple escalar es el cálculo del volumen de un paralelepípedo.



Proyección de $\vec{C}$ sobre la dirección de $\vec{A}\times\vec{B}$

Figura 2.66

El volumen de un paralelepípedo es el producto del área de la base por la altura.

El área de la base es igual al **módulo** del producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$. La altura es la proyección del vector $\vec{C}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}\times\vec{B}$.

La altura del paralelepípedo es igual a $|C\cos\theta|$.

Observe que: $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = |\vec{A}\times\vec{B}|\,|\vec{C}|\cos\theta$

Así, $|\vec{C}|\cos\theta = \dfrac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}$ que es la altura del paralelepípedo.

Este valor multiplicado por el área de la base que es $|\vec{A}\times\vec{B}|$ da como resultado el volumen del paralelepípedo.

$$V = \frac{(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}\,|\vec{A}\times\vec{B}|$$

Por lo tanto, $V = (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}$ es el volumen del paralelepípedo cuyos lados son los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

2.21 COSENOS DIRECTORES

Los cosenos directores de un vector son los cosenos de los ángulos que el vector forma con los ejes x, y y z. La nomenclatura usada en general es: el ángulo que el vector forma con el eje x es α, el que forma con el eje y es β y el que forma con el eje z es el ángulo γ. En el siguiente diagrama se observan los ángulos directores.

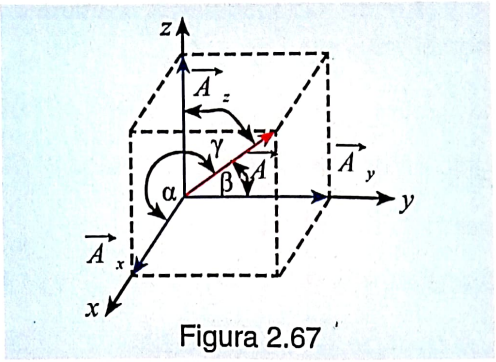


Figura 2.67

Del gráfico

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A}$$

$$\cos\beta = \frac{A_y}{A}$$

$$\cos\gamma = \frac{A_z}{A}$$

Estos son los denominados cosenos directos del vector $\vec{A}$. Recordando el caso del vector unitario, vamos a escribirlo de acuerdo a su definición.

$$\hat{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{(A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k})}{A}$$

$$\hat{u}_A = \frac{A_x}{A}\hat{i} + \frac{A_y}{A}\hat{j} + \frac{A_z}{A}\hat{k}$$

De la última ecuación se puede deducir que los coeficientes de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ son los mismos que los cosenos directores del vector $\vec{A}$. Esto es, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Por lo tanto, el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$ puede escribirse en función de los cosenos directores de la siguiente forma:

$$\hat{u}_A = (\cos\alpha)\hat{i} + (\cos\beta)\hat{j} + (\cos\gamma)\hat{k}$$

donde: $\hat{u}_A$ es el vector unitario en la dirección del vector $\vec{A}$.

Como la magnitud del vector unitario es la unidad, se puede llegar a la siguiente conclusión:

$$\sqrt{(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2} = 1$$

Y al elevar al cuadrado ambos lados de la última ecuación:

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (2.28)$$

Ejemplo 2.37 - Un vector $\vec{A}$ forma una ángulo de 60° con el eje x y 80° con el eje y. Calcule los dos ángulos que este vector forma con el eje z.

Aplicando la relación: $(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$ y conociendo que:

$\alpha = 60°$ y $\beta = 80°$ despejando γ queda :

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - (\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2}$$

remplazando:

$$\cos\gamma = \pm\sqrt{1 - \cos^2 60° - \cos^2 80}$$

$$\cos\gamma = \pm 0.848 \qquad \gamma_1 = 32°;\ \gamma_2 = 148°$$

Se puede observar que existen dos vectores que cumplen con las condiciones del problema. Se deja al estudiante para que visualice a estos dos vectores.

Ejemplo 2.38 - La cantidad física $\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A}$ representa el flujo eléctrico a través de una superficie, siendo $\vec{E}$ el vector campo eléctrico y $\vec{A}$ el vector área.

Si $\vec{E} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{i}$,entonces la suma del ángulo que se forma entre ellos, y el ángulo que forma el vector $\vec{E}$ con el eje y es:

Solución

Para conocer el ángulo entre dos vectores usaremos el producto punto. $\vec{E} \cdot \vec{A} = EA\cos\Omega$

Así tenemos $\cos\Omega = (\vec{E} \cdot \vec{A})/EA$

$\cos\Omega = (5\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 2\hat{j}) / [7.35 \times 2.83]$

$\cos\Omega = 6/20.8 \quad \cos\Omega = 0.288 \quad \Omega = 73.20$

Ahora para conocer el ángulo que forma el vector $\vec{E}$ con el eje de las y usaremos los cosenos directores.

$$\cos\beta = 2/7.35 \Rightarrow \cos\beta = 0.272 \Rightarrow \beta = 74.2^{\circ}$$

Finalmente sumamos los ángulos obtenidos y tenemos que el valor requerido:

$$\theta = 73.2^{\circ} + 74.2^{\circ} = 147.4^{\circ}$$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Multiplicación de un escalar por un vector

Actividad 2.1

Un escalar positivo y mayor que uno es multiplicado por un vector $\vec{A}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) La magnitud del vector $\vec{A}$ se reduce, pero su dirección se mantiene constante.

b) La magnitud del vector $\vec{A}$ aumenta, pero su dirección varía $180°$.

c) La magnitud del vector $\vec{A}$ aumenta y su dirección no varía.

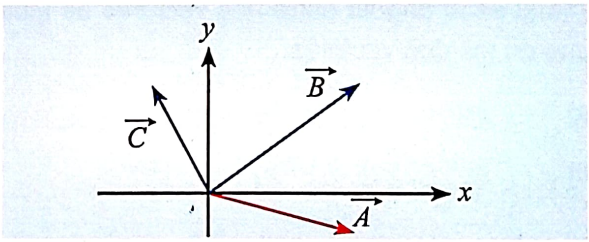
d) La magnitud del vector $\vec{A}$ aumenta y su dirección varía $90°$.

e) Todas las anteriores son respuestas posibles.

Operaciones con vectores por métodos gráficos

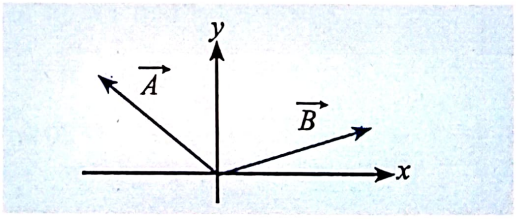
Actividad 2.2

Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ mostrados en la figura, determine gráficamente el vector resultante $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Use el método gráfico del polígono.



Actividad 2.3

Dados los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura, gráfique el vector $\vec{A} - 2\vec{B}$. Use el método gráfico del paralelogramo.



Actividad 2.4

Dos vectores tienen una resultante máxima de 55 unidades y una resultante mínima de 15 unidades. ¿Cuál sería el posible valor de las magnitudes de cada uno de los vectores?

a) 0 unidades y 55 unidades

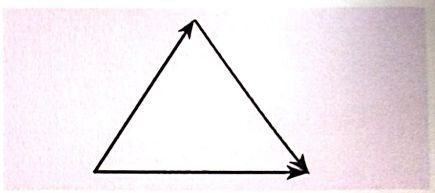
b) 20 unidades y 35 unidades

c) 5 unidades y 11 unidades

d) 0 unidades y 70 unidades

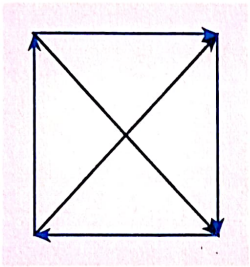
Actividad 2.5

La figura muestra el siguiente sistema de tres vectores, donde el triángulo formado es un triángulo equilátero de lado igual a 2 unidades. Determine la magnitud de la resultante de la suma vectorial de todos los vectores del sistema.



a) 0 unidades
b) 2 unidades
c) 3 unidades
d) 4 unidades
e) 6 unidades

Actividad 2.6



Encontrar la magnitud del vector resultante del siguiente sistema de vectores mostrados en la figura, sabiendo que el lado del cuadrado mide 2 unidades:

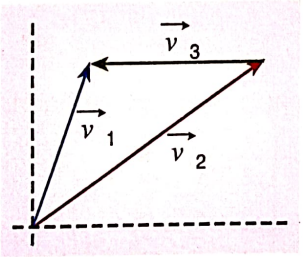
a) 2 unidades
b) 4 unidades
c) 6 unidades
d) $2\sqrt{2}$ unidades
e) $6\sqrt{2}$ unidades

Actividad 2.7

¿Cuál es el ángulo entre dos vectores de igual magnitud para que su resultante tenga una magnitud igual a uno de los dos vectores.

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 90°
e) 120°

Actividad 2.8

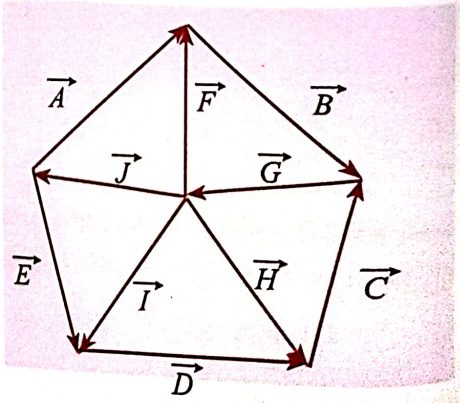


Determine la magnitud del vector que al sumarse con los vectores mostrados en la figura, se obtenga una resultante nula. Se conoce que la magnitud de los vectores son: $|\vec{v}_1| = 8\ m$; 60°, $|\vec{v}_2| = 10\ m$.

a) $0\ m$
b) $8\ m$
c) $16\ m$
d) $20\ m$
e) Es imposible determinar la magnitud del vector.

Actividad 2.8

Dado el siguiente sistema de vectores del mismo tipo, determine cuál de los siguientes enunciados es el incorrecto.

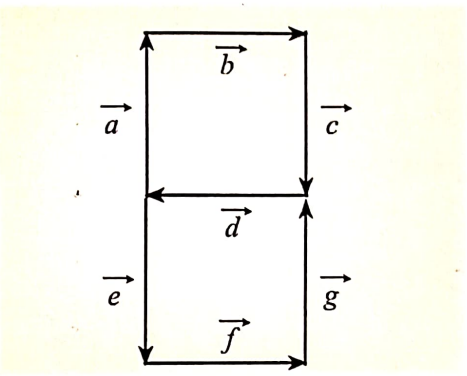


a) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{G} + \vec{J} = 0$
b) $\vec{F} + \vec{G} + \vec{B} = 0$
c) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{G} + \vec{F} = 0$
d) $\vec{I} = \vec{J} + \vec{E}$
e) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{G} + \vec{I} = \vec{E}$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 2.10

Se tiene el siguiente sistema de vectores de igual magnitud. ¿En cuál de las siguientes operaciones se obtiene el vector de mayor magnitud?



a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) $\vec{a} + \vec{d} + \vec{g}$

c) $\vec{a} + \vec{e} + \vec{f}$

d) $\vec{a} + \vec{c} + \vec{g}$

e) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$

Actividad 2.11

Si la suma entre 3 vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es nula, entonces escoja la alternativa correcta.

a) La suma de 2 de ellos es igual al tercero.

b) La magnitud de $\vec{A} + \vec{B}$ es igual a la magnitud de $\vec{C}$.

c) Los 3 vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ tienen la misma dirección.

d) Los 3 vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son perpendiculares.

Suma de vectores por el método de las componentes rectangulares

Actividad 2.12

Conociendo el vector $\vec{v}_1$ y el vector $\vec{r}_2$, con sus siguientes componentes ortogonales:

$\vec{v}_1 = (10\ m/s)\ \hat{i} + (4\ m/s)\ \hat{j}$ y $\vec{r}_2 = (16\ m)\ \hat{i} - (4\ m)\ \hat{j}$. ¿Cuál es la magnitud del vector $\vec{v}_1 - \vec{r}_2$?

a) $10\ m$ b) $2\ m/s$ c) $10\ m/s$ d) $2\ m$

e) Es imposible realizar esta operación.

Actividad 2.13

Se tiene un vector $\vec{A}$ de $4u$ de magnitud dirigido hacia abajo y un vector $\vec{B}$ de $3\ u$ de magnitud dirigido hacia arriba. ¿Cuál sería el valor del vector $\vec{A} - 2\vec{B}$?

a) $2\ u$ dirigida hacia abajo.

b) $2\ u$ dirigida hacia arriba.

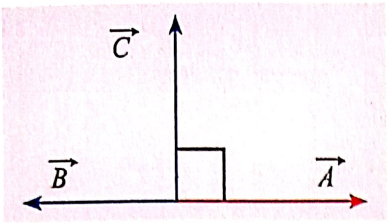
c) $6\ u$ dirigida hacia abajo.

d) $10\ u$ dirigida hacia abajo.

e) $10\ u$ dirigida hacia arriba.

Actividad 2.14

Dados los vectores mostrados en la figura, calcule las siguientes operaciones: (solo calcule las magnitudes).



$A = 6$ unidades

$B = 3$ unidades

$C = 4$ unidades

OPERACIONES:

a) $|\vec{A} + \vec{B}|$

b) $|\vec{A} - \vec{B}|$

c) $|\vec{B} + \vec{C}|$

d) $|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}|$

Actividad 2.15

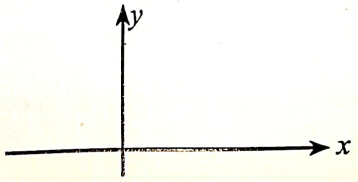
Se conoce un vector $\vec{A}$ que tiene una magnitud de $15u$ y una dirección al Norte, un vector $\vec{B}$ que tiene una magnitud de $3u$ y una dirección Oeste, y un vector $\vec{C}$ que tiene una magnitud de $11u$ al Sur. Determine la magnitud del vector resultante $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

a) $6u$ b) $5u$ c) $29u$ d) $7u$

Actividad 2.16

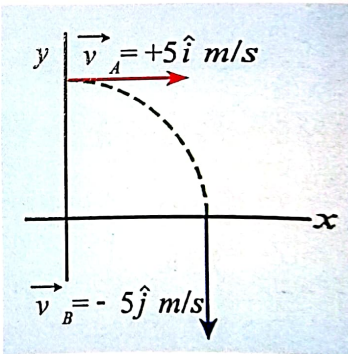
Dados los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ que se indican a continuación, calcule la magnitud y la dirección del vector resultante $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ usando el método de las componentes rectangulares.

$\vec{A} = 10u, -20°$ $\vec{B} = 20u, 30°$ $\vec{C} = 15u, 120°$



Actividad 2.17

Suponga que un objeto realiza un cuarto de vuelta y se mueve con rapidez constante de $5.0\ m/s$. Si el objeto se mueve desde el punto A hasta el punto B, calcule el vector cambio de velocidad ($\vec{v}_B - \vec{v}_A$) del objeto en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y su magnitud.

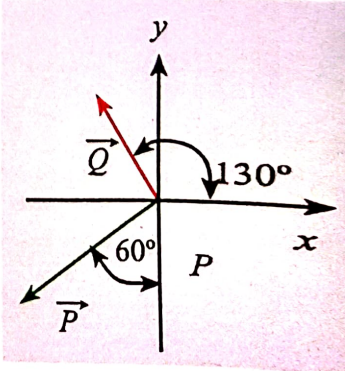


Actividad 2.18

Dados los vectores $\vec{P}$ y $\vec{Q}$, donde la magnitud del vector $\vec{P}$ es de $10\,u$ y la magnitud del vector $\vec{Q}$ es de 6 unidades:

a) Calcule la suma $\vec{P} + \vec{Q}$.

b) Calcule el ángulo que forma el vector $\vec{P} + \vec{Q}$ con el eje positivo de las x usando la ley del Seno.

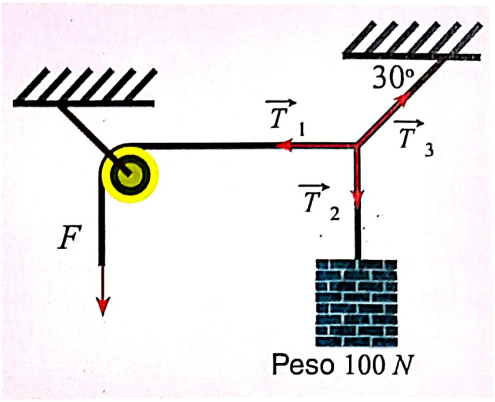


Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 2.19

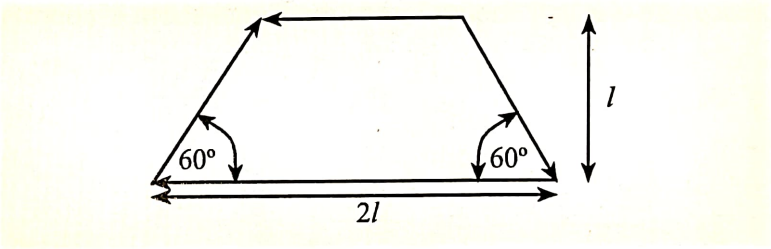
En la figura se muestran las cuerdas T_1, T_2 y T_3 que sostienen en reposo a un bloque que pesa 100 N. Para las direcciones de las cuerdas de la figura. Se pide: Nota: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$ (la cuerda T_1 se mantiene horizontal y T_2 vertical)

Calcular el valor de las tres tensiones. T_1, T_2 y T_3, aplicando el método de las componentes rectangulares.



Actividad 2.20

Sobre los lados de un trapecio se encuentran vectores como se muestra en la figura. Exprese la magnitud de la resultante de la suma de los vectores en términos de l.

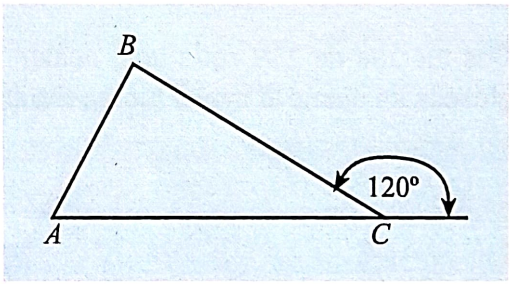


SUMA DE VECTORES APLICANDO LA LEY DEL COSENO Y SENO

Actividad 2.21

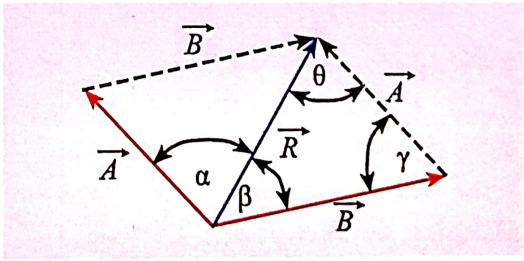
Para el triángulo ABC mostrado en la figura, calcule el valor del lado AB usando la ley del coseno. El lado AC mide $9cm$ y el lado BC mide $6cm$. Datos:

$cos60° = 0.5$



Actividad 2.22

Dados dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ como se muestran en la figura, donde $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$, indique cuál de las siguientes alternativas es la correcta.



a) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\beta}$

b) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos\alpha}$

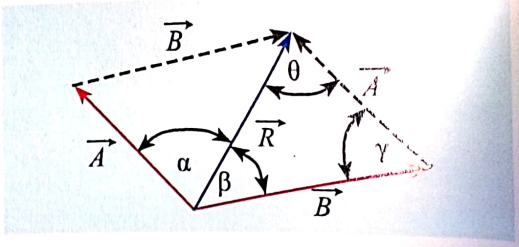
c) $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2ABcos(\alpha+\beta)}$

d) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos(\alpha+\beta)}$

e) $R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2ABcos(180 - \beta)}$

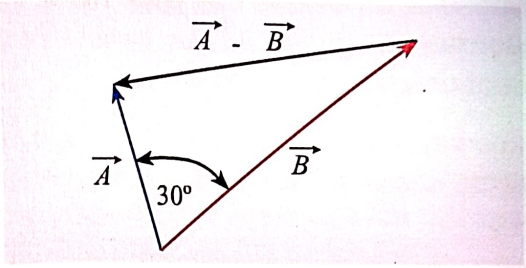
Actividad 2.23

Con respecto al siguiente gráfico, ¿Es verdad que la magnitud de la resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ es $R = \sqrt{A^2+B^2 - 2AB\cos\gamma}$?



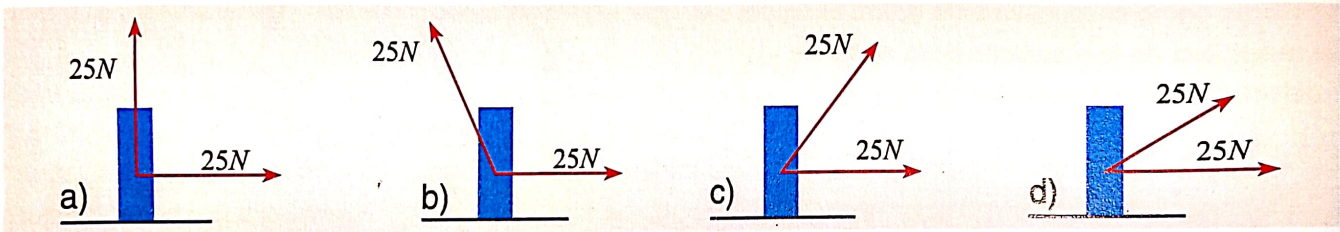
Actividad 2.24

Para los vectores mostrados calcule $|\vec{A} - \vec{B}|$. Si $A = 4u$, $B = 10u$, $\theta = 30^\circ$ y $\cos 30^\circ = 0.866$.



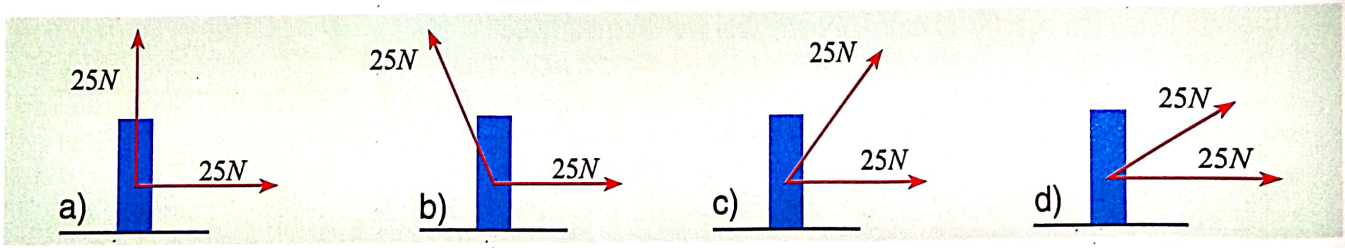
Actividad 2.25

Dos fuerzas de $25N$ cada una, actúan simultáneamente en un mismo soporte. ¿En cuál de los siguientes gráficos se ejerce la menor fuerza resultante sobre el soporte?



Actividad 2.26

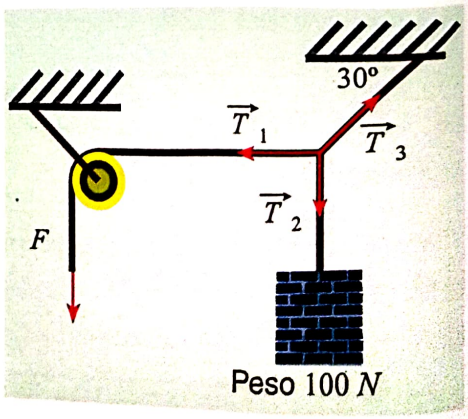
Dos fuerzas de $25N$ cada una, actúan simultáneamente en un mismo soporte. ¿En cuál de los siguientes gráficos se ejerce la mayor fuerza resultante sobre el soporte?



Actividad 2.27

En la figura se muestran las cuerdas T_1, T_2 y T_3 que sostienen en reposo a un bloque que pesa 100 N. Para las direcciones de las cuerdas de la figura. Se pide: Nota: $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$ (la cuerda T_1 se mantiene horizontal y T_2 vertical)

Calcular el valor de las tres tensiones. T_1, T_2 y T_3, usando diagrama vectorial (triangulo de Fuerzas / Use ley del coseno o seno).



Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

VECTOR UNITARIO EN 3 DIMENSIONES

Actividad 2.28

¿Cuál de las siguientes alternativas representa a un vector unitario?

a) $\hat{i}+\hat{j}$ b) $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$

c) $1/2\,\hat{i}+1/2\,\hat{j}$ d) $1/3\,\hat{i}+1/3\,\hat{j}+1/3\,\hat{k}$

e) $1/\sqrt{2}\;\hat{i}+1/\sqrt{2}\;\hat{j}$

SUMA DE VECTORES EN 3 DIMENSIONES

Actividad 2.29

Sean los siguientes vectores:

$\vec{A}=2\hat{i}+2\hat{j}+c\hat{k}$ y $\vec{B}=a\hat{i}+b\hat{j}-2\hat{k}$.

Si la suma $\vec{A}+\vec{B}=0$, los valores de a, b, y c son:

	a	b	c
a)	- 2	- 2	- 2
b)	+2	+2	- 2
c)	- 2	+2	- 2
d)	- 2	- 2	+2
e)	- 2	- 2	0

PRODUCTO ESCALAR O PUNTO

Actividad 2.30

Suponga que un vector $\vec{A}$ tiene una magnitud de 5 unidades, ¿cuál es el valor de $\vec{A}\cdot\vec{A}$?

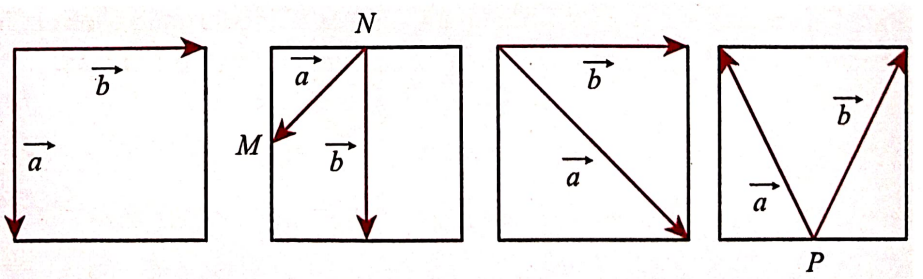
a) 0 b) 5 c) 10 d) 25

e) El producto $\vec{A}\cdot\vec{A}$ no tiene definición.

Actividad 2.31

¿En cuál de los siguientes gráficos de vectores se obtiene el menor producto punto entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

Nota: los vectores están graficados dentro de un cuadrado de lado l.



Los puntos M, N y P corresponden a los puntos medios de cada lado.

Actividad 2.32

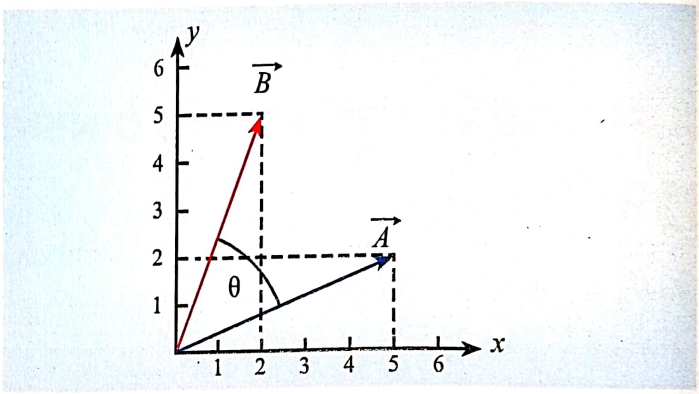
Si el vector $\vec{A}$ se halla en el plano xy, ¿cuál es el ángulo que este vector forma con el vector unitario $\hat{k}$?

Actividad 2.33

Un vector $\vec{A}$ se halla en el plano xy y otro vector $\vec{B}$ se halla en el plano yz. ¿Será el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ necesariamente 90°?

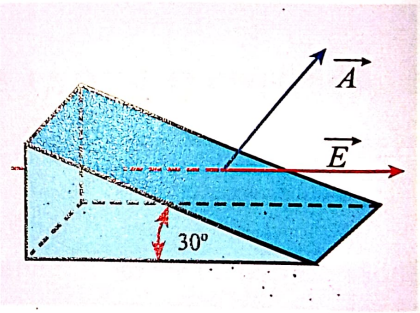
Actividad 2.34

Calcule el coseno del ángulo θ entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura. Use producto punto.



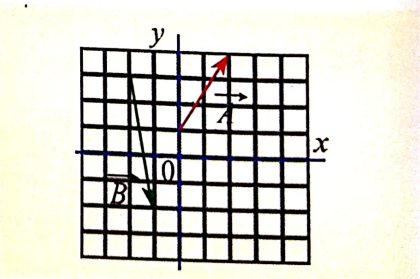
Actividad 2.35

En la figura mostrada el vector $\vec{E}$ está en la dirección horizontal y el vector $\vec{A}$ es perpendicular a la superficie inclinada. Calcule $\vec{E} \cdot \vec{A}$ y $|\vec{E} \times \vec{A}|$. Suponga que $\vec{E}$ es el campo eléctrico y su magnitud es de 500 N/C, mientras que $\vec{A}$ es el área de la superficie inclinada y su magnitud es 0.5 m^2. Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{E}$ no están dibujados a escala.



Actividad 2.36

Para los vectores mostrados en la figura, calcule el ángulo entre ellos usando el concepto de "producto punto". Nota: cada cuadrícula vale 1 unidad.



Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

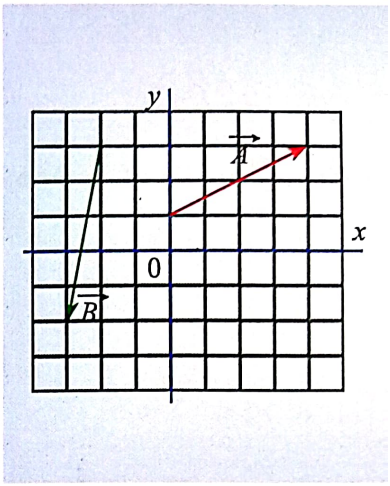
Actividad 2.37

Para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura: Se pide:

Nota: cada cuadrícula vale 1 unidad

a) Hallar $\vec{A} - 2\vec{B}$

b) Calcular el ángulo comprendido entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ usando el concepto de "producto punto".



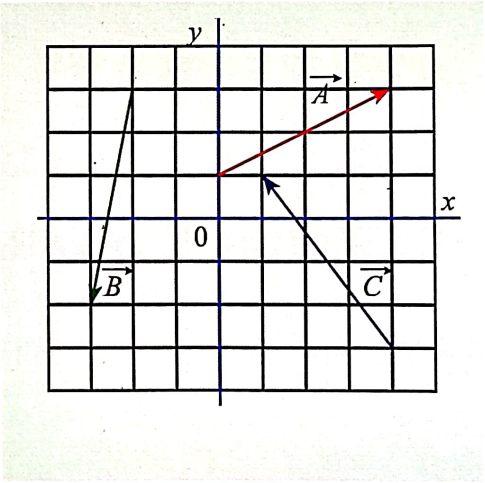
Actividad 2.38

Se tienen los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ como se muestra en la figura. Determinar:

Nota: cada cuadrícula vale 1 unidad

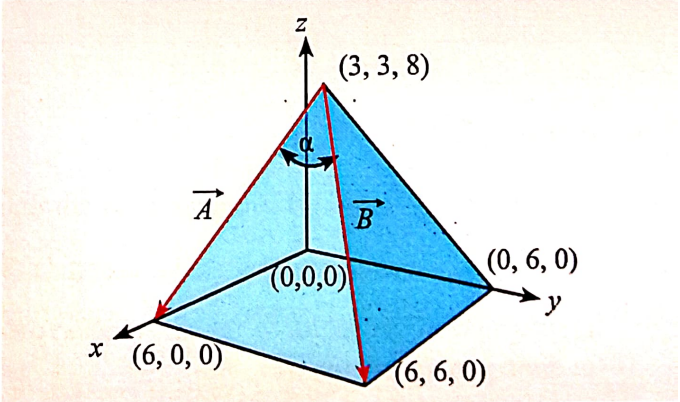
a) $\vec{A} + \vec{B} - 2\vec{C}$

b) $\vec{A} - \vec{B} - 2(\vec{C} \cdot \vec{A})\,\vec{B}$



Actividad 2.39

Con las coordenadas de la pirámide mostrada calcular el ángulo α de una de las caras de la pirámide. Use producto punto.



Actividad 2.40

¿Cuál es el ángulo que el vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ forma con el eje z?

a) 55^o b) 60^o c) 45^o

d) 30^o e) 90^o

Actividad 2.41

Calcule el ángulo θ que el vector $c\hat{i} + d\hat{j}$ forma con el eje z. Considere que c y d son dos constantes positivas.

a) $\theta = tan^{-1}(d/c)$ b) $\theta = tan^{-1}(c/d)$ c) $\theta = 0^o$

d) $\theta = 90^o$ e) θ no se puede determinar ya que no se conoce el valor de c y d.

Actividad 2.42

Un vector $\vec{A}$ se halla sobre el plano xy y forma un ángulo de 45^o con el eje positivo de las x, otro vector $\vec{B}$ se halla sobre el plano xz y forma un ángulo de 45^o con el eje positivo de las x. Entonces, el ángulo que forman los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ entre si es:

a) 180^o b) 120^o c) 90^o

d) 60^o e) 45^o

PROYECCIÓN ESCALAR DE UN VECTOR SOBRE OTRO

Actividad 2.43

¿Es correcto afirmar que el producto punto entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ representa la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$?

SI NO

Justifique su respuesta:_____

_____

Actividad 2.44

Indique cuál de las siguientes alternativas es la correcta.

a) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$.

b) La proyección del vector $\vec{A}$ en la dirección del vector $\vec{B}$, es igual a la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$.

c) Si el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$ son perpendiculares entonces $A - B$ es igual a cero.

d) $\frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$ es igual al coseno del ángulo entre el vector $\vec{A}$ y el vector $\vec{B}$

e) Si el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es igual a 90^o; entonces, la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$ es igual a 0.

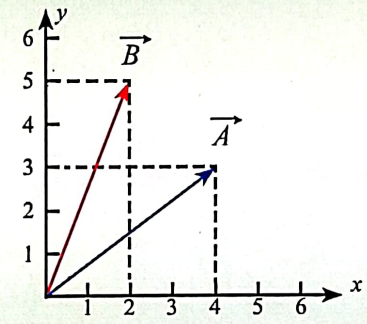
Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 2.45

Calcule la proyección del vector $10\hat{k}$ sobre la dirección del vector $5\hat{j}$.

Actividad 2.46

Con respecto a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura, calcule la proyección del vector $\vec{B}$ sobre la dirección del vector $\vec{A}$

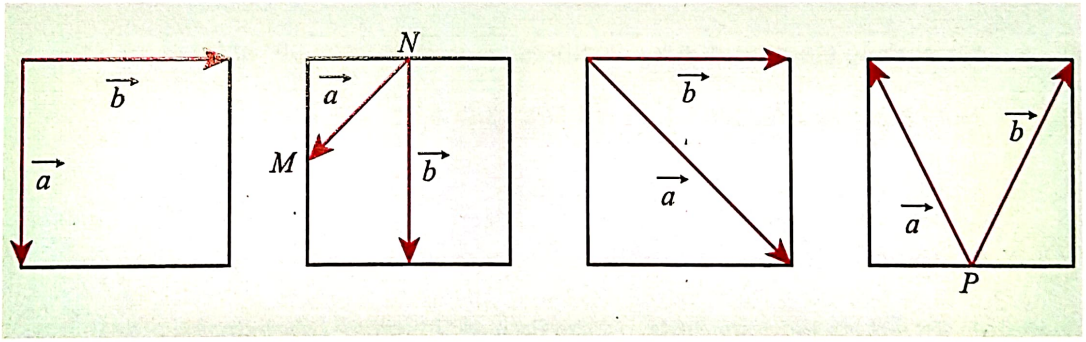


PRODUCTO VECTORIAL O PRODUCTO CRUZ ENTRE VECTORES

Actividad 2.47

¿En qué gráfico al realizar producto cruz entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se obtiene el vector de menor magnitud?

Nota: los vectores están graficados dentro de un cuadrado de lado l donde los puntos M, N y P estan ubicados en la mitad de cada lado.



Actividad 2.48

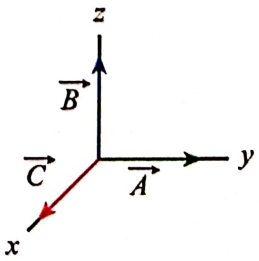
Si el vector $\vec{A}$ apunta en el eje de las y; el vector $\vec{B}$, en el eje de las z y el vector $\vec{C}$, en el eje de las x, determine cuál de las siguientes expresiones generaría un vector que se encuentre únicamente en el plano yz.

a) $(\vec{A} \times \vec{C}) + \vec{B}$

b) $(\vec{C} \times \vec{A}) + \vec{B} + \vec{A}$

c) $\vec{C} - (\vec{A} \times \vec{B})$

d) $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$



Actividad 2.49

Se tiene 3 vectores. El vector $\vec{A}$ se halla a lo largo del eje de las x; el vector $\vec{B}$ a lo largo del eje de las y, y el vector $\vec{C}$ a lo largo del eje de las z. ¿Cuál de las alternativas es correcta acerca del vector $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$?

a) El vector $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ se halla sobre el plano xy

b) El vector $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ no tiene ningún sentido real.

c) El vector $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ tiene magnitud $(AB)C$.

d) El vector $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ tiene magnitud CERO.

e) El vector $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ tiene magnitud igual a $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$

Actividad 2.50

Calcule el resultado de la expresión $\vec{A}\times(\vec{A}\times\vec{A})$

a) A^3 b) $3A\cos\theta$ c) CERO

d) $3A\cos\alpha$ e) $A\cos\alpha+A\cos\beta+A\cos\gamma$

Actividad 2.51

Bajo qué condiciones se cumple que $|\vec{A}\times\vec{B}| = |\vec{A}\cdot\vec{B}|$

a) Siempre se cumple.

b) Que el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sea igual a $45°$

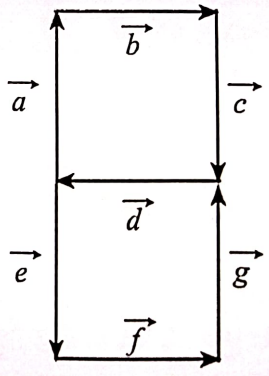
c) Que el ángulo que $\vec{A}$ forma con el eje x sumado al ángulo que $\vec{B}$ forma con el eje y den un total de $90°$.

d) Se cumple siempre que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ formen $90°$ entre sí.

e) Nunca es posible que $|\vec{A}\times\vec{B}|$ sea igual a $|\vec{A}\cdot\vec{B}|$.

Actividad 2.52

Tomando en cuenta la figura dada, ¿Cuál de las siguientes expresiones da el vector de mayor magnitud?



a) $(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c}+\vec{g}$ b) $(\vec{a}\times\vec{c})+\vec{d}$

c) $(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{f}\times\vec{g})$ d) $(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{e}$

e) $\vec{a}-\vec{c}+\vec{g}-\vec{e}$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 2.53

Dados los siguientes vectores:

$\vec{A} = (-\ 4\hat{i} + 7\hat{j} -\ 15\hat{k})$ $\vec{B} = (8\hat{i} + 7\hat{j} -\ 20\hat{k})$ $\vec{C} = (-\ 10\hat{i} -\ 8\hat{j} + 5\hat{k})$

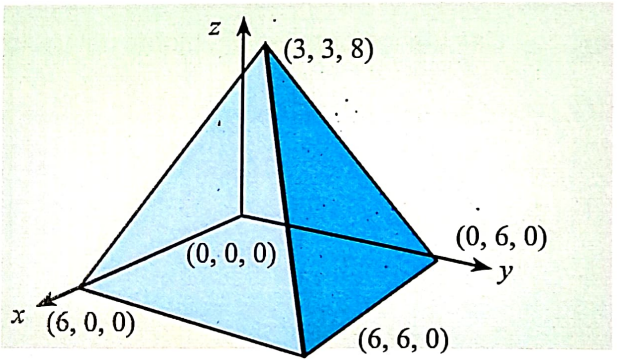
Encuentre un vector que cumpla con las siguientes características:

a) Que sea paralelo a $\vec{V} = \vec{A} - (\vec{B} \times \vec{C})$.

b) Que sea paralelo al vector $\vec{V}$ y que su magnitud sea igual a 10 unidades.

Actividad 2.54

Determinar el área de la cara sombreada de la pirámide.

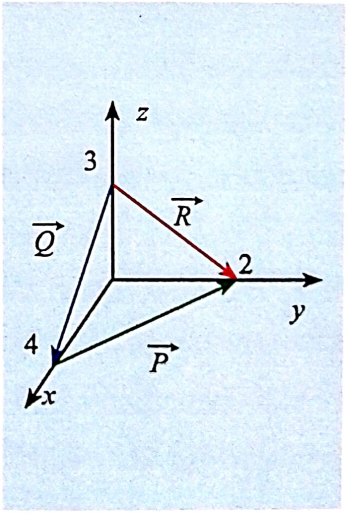


Actividad 2.55

Dados los vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{R}$ como se muestra en la figura. Se pide:

a) Calcular el vector de magnitud 10 y que sea perpendicular a los vectores $\vec{P}$ y $\vec{R}$

b) Calcular el área del triangulo formado por los vectores $\vec{P}$, $\vec{Q}$ y $\vec{R}$ usando producto vectorial



PRODUCTO TRIPLE ESCALAR

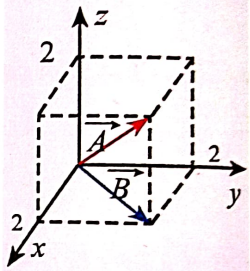
Actividad 2.56

Determine el volumen del paralelepípedo formado por los siguientes vectores $\vec{M}$, $\vec{N}$ y $\vec{O}$. Nota: La base del paralelogramo está formado por los vectores $\vec{M}$ y $\vec{N}$

$\vec{M} = (5\hat{i} + 14\hat{j} - 9\hat{k})$ $\vec{N} = (-8\hat{i} + 5\hat{j} - 22\hat{k})$ $\vec{O} = (6\hat{i} - 15\hat{j} - 3\hat{k})$

COSENOS DIRECTORES DE UN VECTOR

Actividad 2.57



Un vector $\vec{A}$ se dirige desde el origen hasta el vértice opuesto de un cubo como se muestra en la figura. Se pide:

a) Calcule el ángulo que el vector $\vec{A}$ forma con el vector $\vec{B}$ el cual se halla en el plano xy.

b) Calcule los ángulos directores del vector $\vec{A}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

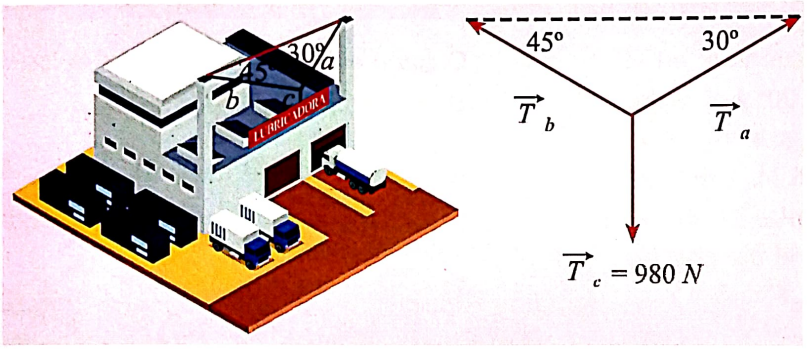
Nombre: .....

Paralelo: .....

2.1 Un expreso estudiantil después de salir de la escuela hace un recorrido de 500m en dirección Sur, luego $300m$ hacia el Oeste y por último recorre $125m$ hacia el Suroeste. Determine el desplazamiento resultante.

2.2 Un carro se desplaza $450m$ en una ruta muy despejada al Norte, luego recorre $200m$ al Este y finalmente $150m$ al Sur. Determinar el vector resultante.

2.3 Un anuncio publicitario tiene un sistema de soporte de dos cuerdas a y b, las cuales soportan un letrero que pesa $980N$ como se indica en la figura.

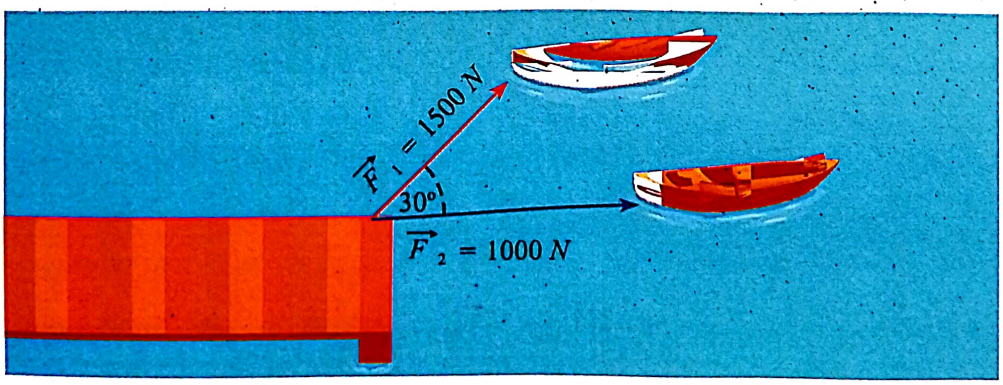


Si $\vec{T}_a + \vec{T}_b + \vec{T}_c = 0$. Calcule las tensiones en cada cuerda.

2.4 En un muelle se encuentran dos canoas sujetas a cierta distancia del muelle con un mismo punto común de soporte, las fuerzas de tensión en las cuerdas de estas canoas son $\vec{F}_1 = 1500\ N$ y $\vec{F}_2 = 1000\ N$.

a) Determine la magnitud de la fuerza resultante $\vec{F}_R$ que se ejerce sobre el soporte del muelle.

b) Determine el ángulo que forma la fuerza resultante $\vec{F}_R$ con $\vec{F}_2$

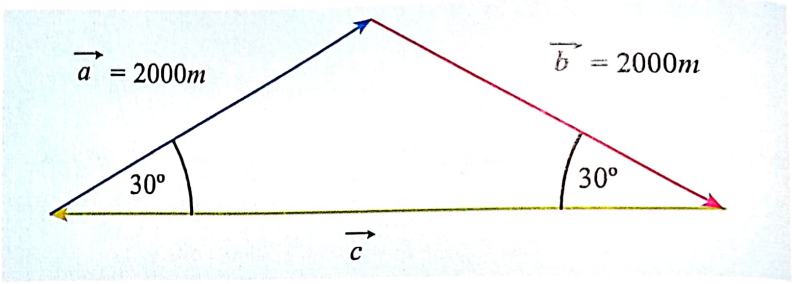


2.5 Una carrera de caballos tiene como recorrido 3 tramos: $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$ como se muestra en la figura. Si la meta coincide con en punto de partida, determinar

a) La magnitud del vector $\vec{c}$

b) El vector resultante.

c) La distancia total recorrida



2.6 Halle el vector resultante de la suma de los siguientes vectores:

$\vec{F}_1 = 5\ N, 0°$ $\quad$ $\vec{F}_2 = 8\ N, 30°$

$\vec{F}_3 = 10\ N, 150°$ $\quad$ $\vec{F}_4 = 4\ N, 270°$

$\vec{F}_5 = 10\ N, 315°$

2.7 La suma de dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ es el vector $\vec{V}_R$ de magnitud 5.15 unidades y un ángulo de 190.3° con respecto al eje positivo de las x. Si $\vec{V}_1 = 5u, 30°$ ¿cuál es el vector $\vec{V}_2$?

2.8 Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se encuentran en el plano xy, el vector $\vec{A} = 10u, 30°$ y el vector $\vec{B}$ tiene una magnitud de $8u$, si la magnitud del vector resultante es de $16.34u$ y está en el primer cuadrante, encuentre el ángulo que forma el vector $\vec{B}$ con el eje positivo de las x.

2.9 Calcule el producto punto entre los vectores $\vec{A} = 5\hat{i} - \hat{j}$ y $\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j}$

a) $-15\hat{i} - 2\hat{j}$ $\quad$ b) -12

c) -15 $\quad$ d) -17

e) -21

2.10 Calcule el coseno del ángulo que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman entre ellos:

$\vec{A} = 3\hat{i} + 4\hat{k}$ $\quad$ $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$

a) 1/3 $\quad$ b) 2/3

c) 1/2 $\quad$ d) 1/4

e) 1/5

2.11 Si $\vec{A} = \hat{k}$ y $\vec{B} = 2\hat{i} + \hat{j}$, calcule el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

a) 3 $\quad$ b) 2

c) 1 $\quad$ d) CERO

e) - 1

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: ..... Paralelo: .....

2.12 Dados los vectores $\vec{A} = 3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$; $\vec{B} = -2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$; ¿estos vectores son paralelos?

SI NO

2.13 Calcule el ángulo que el vector $\vec{A}$ forma con el eje z.

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$

a) $cos^{-1}(2/3)$ b) $cos^{-1}(-2/3)$

c) $cos^{-1}(1/3)$ d) $cos^{-1}(-1/3)$

e) $cos^{-1}(1/4)$

2.14 Calcule el área del triángulo formado por los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{A} - \vec{B}$

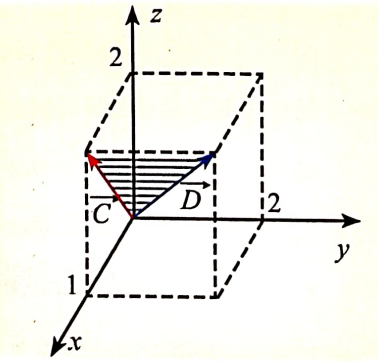
$$\vec{A} = 2\hat{i} + 2\hat{i} - \hat{k}; \qquad \vec{B} = 2\hat{i} + \hat{k}$$

a) $1.0\ u^2$ b) $2.0\ u^2$

c) $3.0\ u^2$ d) $4.0\ u^2$

e) $5.0\ u^2$

2.15 Calcule un vector que sea perpendicular al plano formado por los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$. Muestre el procedimiento detalladamente.



2.16 Si un vector está dado por: $\vec{M} = \hat{i} + 2\hat{j}$ y otro vector por: $\vec{P} = \hat{j} + \hat{k}$, calcule la proyección de $\vec{M}$ sobre la dirección de $\vec{P}$.

a) CERO b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}/2$

2.17 Suponga que los cosenos directores de un vector están dados por: $cos\alpha = 0.8$; $cos\beta = 0.6$

¿Cuál es el ángulo que este vector forma con el eje de las z? (Calcule el ángulo γ).

$cos0^o = 1$; $cos30^o = 0.87$; $cos45^o = 0.7$; $cos60^o = 0.5$; $cos90^o = 0$

a) 0^o b) 30^o

c) 45^o d) 60^o

e) 90^o

2.18 Un vector unitario está dado por:

$\hat{u} = 0.5\hat{i} + 0.7\hat{j} + 0.5\hat{k}$. ¿Cuál de las siguientes alternativas corresponde a los cosenos directores de este vector?

	a)	b)	c)	d)	e)
$cos\alpha$	60^o	0.5	0.5	0.5	Este vector no puede existir.
$cos\beta$	45^o	0.7	0.0	0.7	
$cos\gamma$	60^o	0.5	0.0	indefinido	

2.19 Si α, β y γ son los ángulos que el vector $\vec{A}$ forma con los ejes x, y y z respectivamente, ¿cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

a) $cos\alpha + cos\beta + cos\gamma = 1$ b) $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 0$

c) $\alpha + \beta + \gamma = 180^o$ d) $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = 1$

e) Si $\alpha = 35^o$, $\beta = 55^o$ entonces $cos\gamma = 0$

2.20 Si dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares entonces es cierto que:

a) $\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos0^o$ b) $\vec{A} \times \vec{B} = 0$

c) $\sqrt{A^2 + B^2} = 0$ e) $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|$

d) $\vec{A} \cdot \vec{B}$ es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el vector $\vec{B}$

2.21 ¿Cuál de las siguientes alternativas es la correcta?

a) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ es un vector unitario

b) El $cos\alpha$ del vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ es igual a 1.

c) El $cos\alpha$ del vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ es igual a $\sqrt{3}$

d) El $cos\alpha$ del vector $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ es igual $\sqrt{3}$ /3

e) $\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ es un vector que no existe.

2.22 ¿Cuál es el valor de ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para que $|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A} \cdot \vec{B}|$?

a) 30^o b) 45^o

c) 60^o d) 90^o

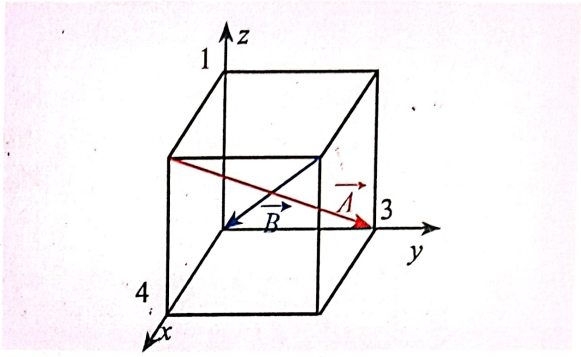
e) 0^o

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: .....

Paralelo: .....

2.23 Calcule el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ mostrados en la figura.



a) $6\sqrt{17}$ b) $5\sqrt{17}$

c) $4\sqrt{17}$ d) $3\sqrt{17}$

e) $2\sqrt{17}$

2.24 Si un vector es $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{k}$ y otro vector es $\vec{B} = \hat{i} + 2\hat{j}$, ¿cuál es el coseno del ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

a) 2/5 b) 3/5

c) 4/5 d) 1.0

e) 0.0

2.25 ¿Cuál es el ángulo que forma el vector $2\hat{i} + \hat{k}$ con el eje z?

a) $\cos^{-1}(1/\sqrt{5})$ b) $\cos^{-1}(1/5)$

c) 90° d) 45°

e) 0°

2.26 Calcule la proyección de un vector (que está en el plano xy) de 10 unidades que forma un ángulo de 30° con el eje positivo de las x sobre la dirección del vector $\hat{j}$.

a) 1 b) 2

c) 3 d) 4

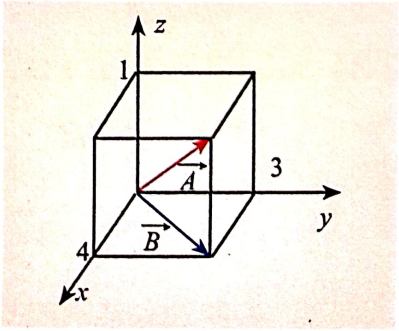
e) 5

2.27 Si un vector se halla en el plano xy y otro vector se halla en el plano yz, entonces el ángulo entre estos dos vectores es:

a) 90° b) 45°

c) 0° d) No se puede determinar con esta información.

2.28 Calcule la proyección del vector $\vec{A}$ sobre la dirección del vector $\vec{B}$. Los vectores están mostrados en el gráfico adjunto.



a) $\sqrt{26}$ b) 7 c) 5

d) 4 e) 1

2.29 Sean $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$ y $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$ y además $\vec{A} \times \vec{B} = \vec{C}$ y $\vec{A} \cdot \vec{B} \neq 0$

Entonces para que $\vec{C} / (\vec{A} \cdot \vec{B}) = 0$ se necesita que:

a) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean paralelos

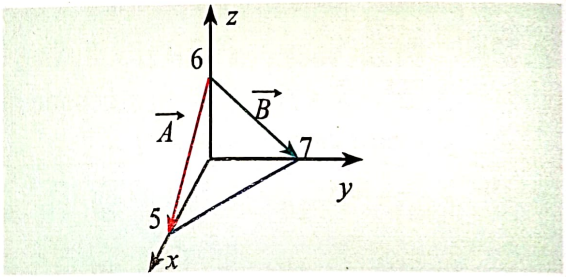
b) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean antiparalelos

c) $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean iguales

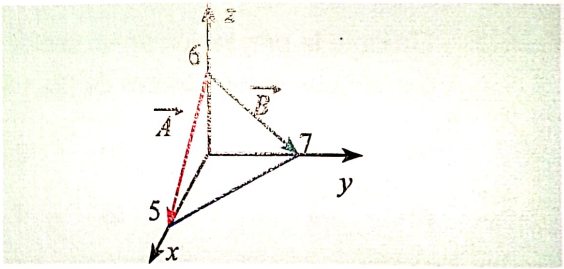
d) Todas las opciones anteriores son válidas

2.30 Una partícula experimenta un vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta X}_1$ partiendo de (1,0,2) y llegando al punto (2, 1, 2). Por otra parte se tiene otro vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta X}_2 = (2\hat{i} + 3\hat{j} + 5\hat{k})\ m$. Encontrar la magnitud del vector $\overrightarrow{\Delta X}_1$ (en m) y además la proyección del vector $\overrightarrow{\Delta X}_2$ sobre $\overrightarrow{\Delta X}_1$.

2.31 Dada la figura en el plano, encuentre la suma de los ángulos directores del vector que sea perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.



2.32 Dada la figura, encuentre el vector $\vec{C} = -1/2\ \vec{A} + 4\vec{B}$



2.33 $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ son vectores que se hallan en el mismo plano. **¿Qué operación se puede realizar?**

a) $\vec{A} \times 2\vec{B} = \vec{C}$

b) $\vec{A} + \vec{B} + 2\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

c) $\vec{A} - 2\vec{B} = 0$

d) $2\vec{A} - 3\vec{B} = p$ (p es un escalar)

2.34 Sean $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{B} = -2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ y $\vec{C} = -4\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$. Entonces $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$ es:

a) $2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$

b) - 114

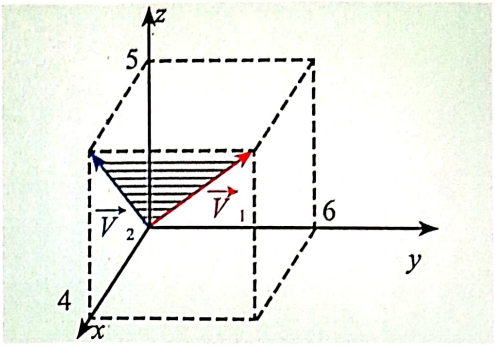
c) - 18

d) 114

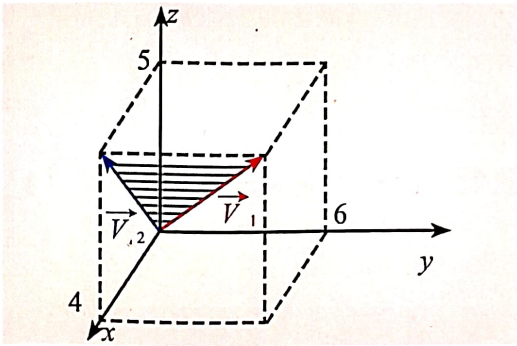
Nombre: .....

Paralelo: .....

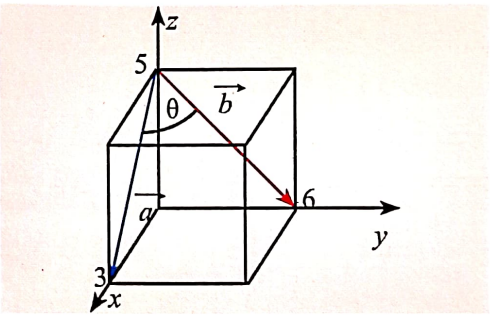
2.35 Determinar el área rayada entre los dos vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ dados en el siguiente gráfico.



2.36 Dado los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ que se muestran en la figura, calcule un vector perpendicular saliendo del plano formado por los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$.



2.37 Dado los vectores que se muestran en la figura. Determinar el ángulo θ entre los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, usando el método del producto vectorial.



2.38 Sean los vectores $\vec{V}_1$ y $\vec{V}_2$ ortogonales entre ellos. Si $\vec{V}_1 = 4\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = 3\hat{i} + \alpha\hat{j} + 3\hat{k}$.

Se pide:

a) Calcular el área del paralelogramo formado por los dos vectores.

b) Hallar los ángulos directores del vector $\vec{V}_2$.

2.39 Sean los vectores $\vec{V}_1 = 8\hat{i} - 12\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{V}_2 = -10\hat{i} + 4\hat{j} + 7\hat{k}$ y $\vec{V}_3$ tal que $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = 0$. Determine $\vec{V}_1 - 2\vec{V}_2 + \vec{V}_3$.

2.40 Sean los vectores $\vec{F}_1 = 8\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$ y $\vec{F}_2 = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$

a) Utilizando la ley del coseno halle el ángulo entre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$

b) Halle los ángulos directores de la resultante.

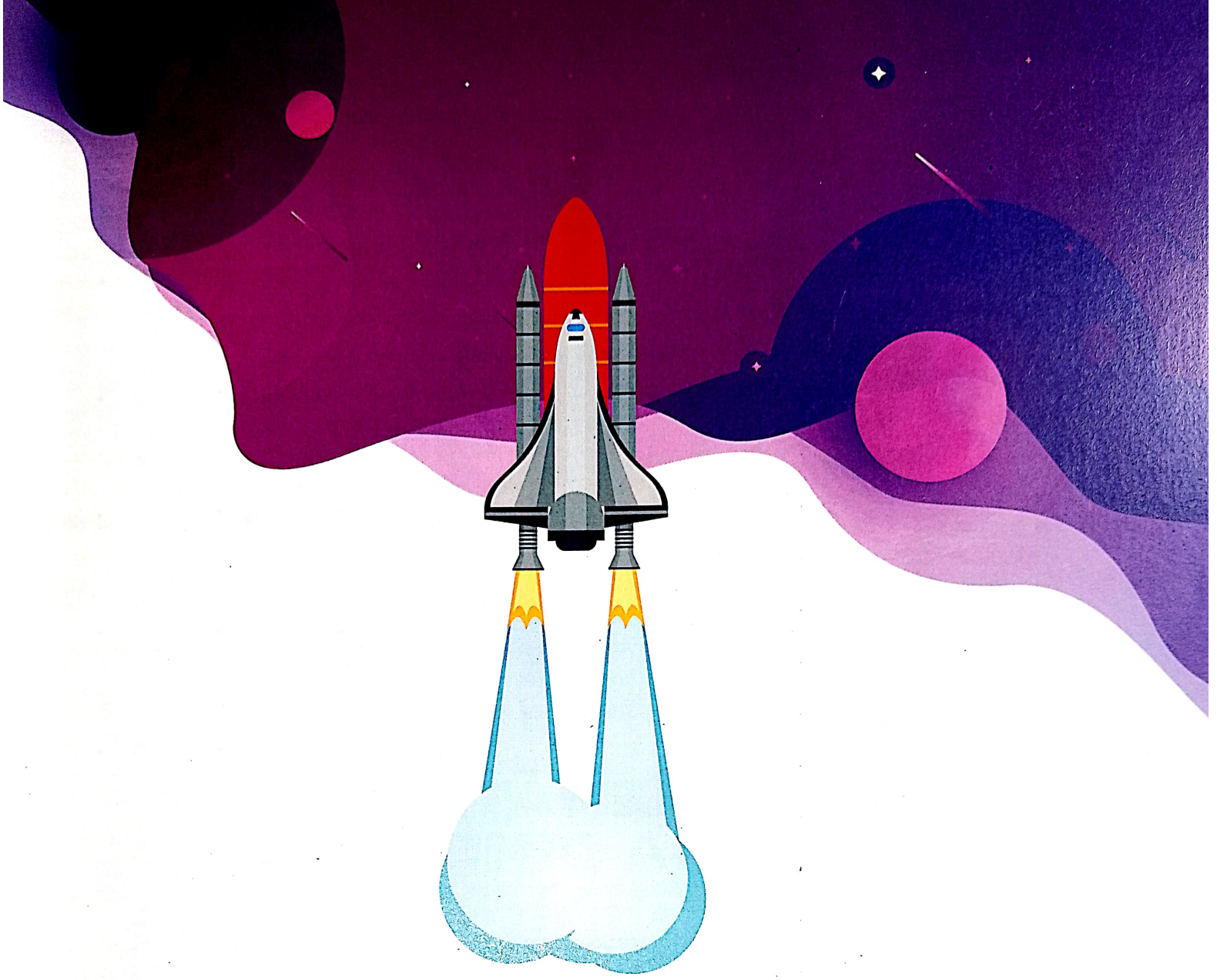
2.41 Dados los vectores $\vec{V}_1 = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 8\hat{k}$ y $\vec{V}_2 = -2\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, halle un vector de magnitud 8, en la dirección de $2\vec{V}_1 - 3\vec{V}_2$.

2.42 El producto punto de 2 vectores es 16. El vector $\vec{A} = 8\hat{i} + 4\hat{j}$ y el vector $\vec{B} = k\hat{i}$, donde k es una constante. Halle el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

2.43 Sea el vector $\vec{A} = 3u, 30°$ y el vector $\vec{B}$ con una magnitud $4u$. Si la magnitud del vector resultante es de $6.35u$, halle el producto escalar entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

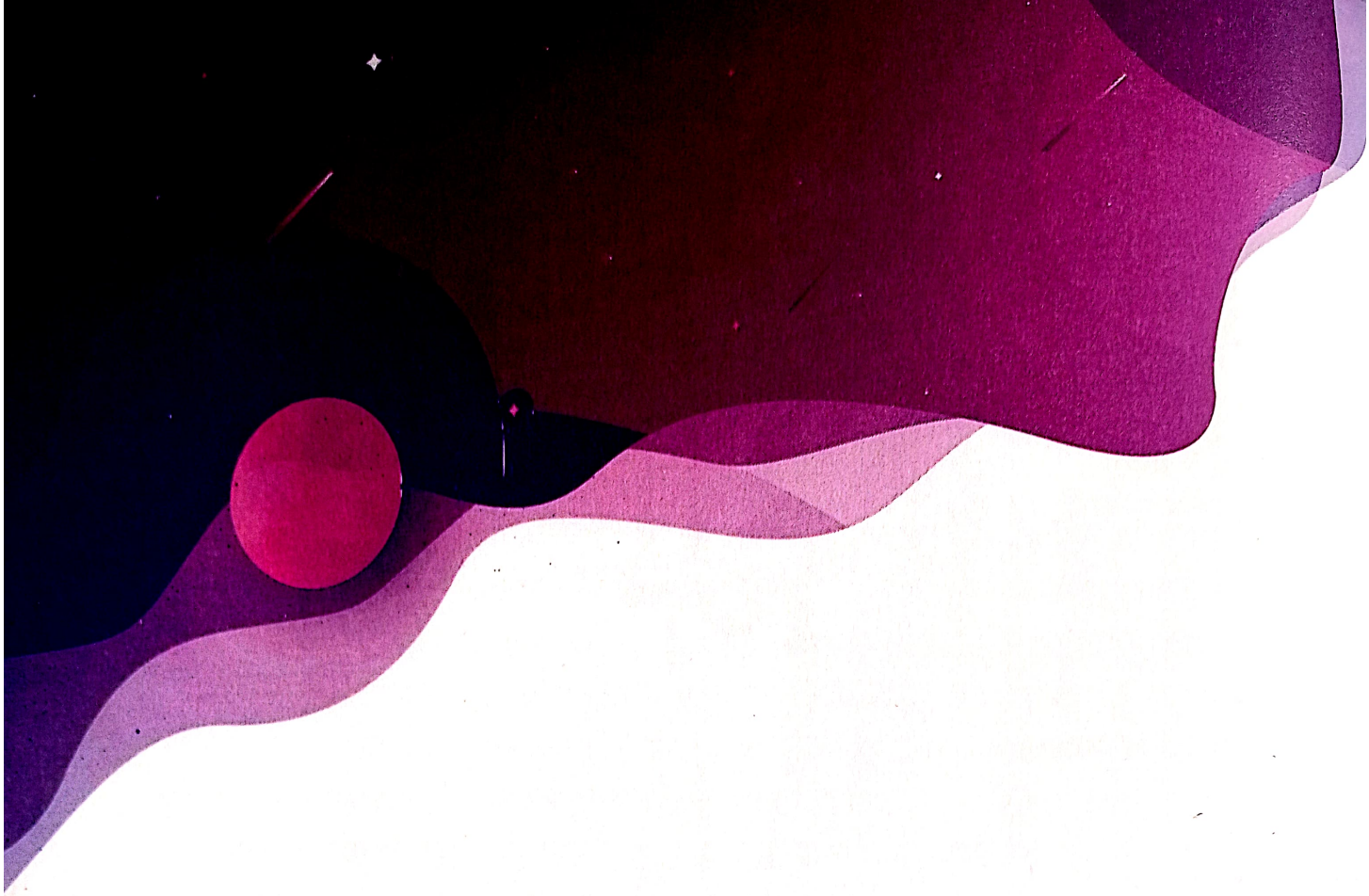
2.44 Dados los vectores $\vec{A} = 5\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = -2\hat{i} + 5\hat{i} + \hat{k}$, halle un vector de magnitud 10, perpendicular al plano que forma $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

2.45 Dados los vectores $\vec{A} = 8\hat{i} - 3\hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{B} = -4\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$, encuentre el área del paralelogramo formado por estos vectores.



3 | CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

La Mecánica es una rama de la física que estudia la cinemática y la dinámica. La primera se encarga del movimiento sin importar las causas que lo producen, mientras que la dinámica introduce el concepto de "fuerza" como la causa por la que los cuerpos adquieren movimiento, se detienen o cambian su dirección. El cambio de posición de un objeto implica que existe un movimiento, pero no se debe olvidar que el tiempo juega un papel importante.



3 | CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

3.1 DESPLAZAMIENTO

El vector posición en la Física representa un vector que parte del origen de un sistema de ejes cartesianos y se dirige hasta donde se encuentra la partícula. Conforme el objeto se mueve, el vector posición también se moverá. Suponga que un auto se ecuentra a $10\,m$ hacia la derecha del origen, entonces su posición será $+10\hat{i}\,m$; si el auto se mueve hasta encontrarse a $30\,m$ a la derecha del origen, su nueva posición será $+30\hat{i}\,m$. El auto puede seguir moviéndose y el vector posición determinará su posición a los diferentes tiempos. La figura 3.1 muestra dos vectores posición (en rojo).

El desplazamiento en Física, es un vector que muestra el cambio de posición de un objeto.

El diagrama de la figura 3.1 muestra el vector posición en rojo y la esfera representa el objeto. Se observa que después de un intervalo de tiempo la posición de la esfera cambia del punto A al punto B. La diferencia de posición se define como desplazamiento (flecha verde).

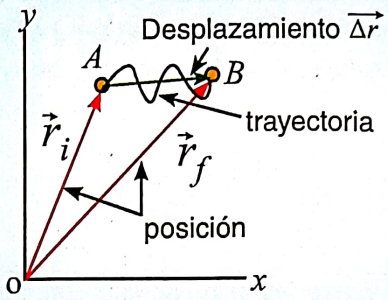


Figura 3.1

Luego de analizar la figura se puede concluir que el desplazamiento es el vector que parte de la posición inicial y se dirige hacia la posición final hasta donde se ha movido el objeto. Este movimiento ha sido realizado en un intervalo de tiempo Δt. Es decir, desplazamiento es la distancia vectorial más corta entre las dos posiciones de un objeto.

$$\overrightarrow{\Delta r} = \overrightarrow{r_f} - \overrightarrow{r_i} \qquad (3.1)$$

donde $\overrightarrow{r}$ se define como "vector posición".

En el caso del movimiento en una dimensión, no se necesita colocar la flecha que denota que la cantidad es un vector, pues si la posición es hacia la derecha es positiva y si es hacia la izquierda es negativa, simplemente sería: $\Delta x = x_f - x_i$.

$$\Delta x = x_f - x_i \qquad (3.2)$$

Ejemplo 3.1 - Una partícula se mueve desde $x = -5m$ hasta $x = 9m$. Calcule su desplazamiento.

En este caso: $x_i = -5m$ $\quad x_f = 9m$ $\quad \Delta x = x_f - x_i$

$\Delta x = 9m - (-5m)$ $\quad \Delta x = 14m$ hacia la derecha.

En general, el movimiento no necesariamente tiene que ser en la dirección x sino que puede ser a lo largo de una recta cualquiera. A cierta dirección de la recta se le asigna el signo positivo y en la dirección contraria el signo negativo.

Ejemplo 3.2 - Una partícula se mueve en línea recta una distancia de $10\,m$ en dirección Noreste, luego se mueve $6\,m$ en dirección Suroeste. Calcule su desplazamiento.

Solución: La partícula se mueve $10\,m$, desde el origen y en dirección Noreste, luego regresa por la misma recta una distancia de $6\,m$ en dirección hacia el origen; por lo tanto, queda a $4\,m$ del origen.

En este caso, se puede decir que la posición inicial es $x_i = 0m$ y que la posición final es $x_f = 4m$; por lo tanto, el desplazamiento es:

$$\Delta x = x_f - x_i = +4m - 0m$$

$\Delta x = +4m$ como muestra la figura 3.2.

El signo positivo indica que el desplazamiento de la partícula es hacia el Noreste que corresponde a la dirección que se escogió como positiva.

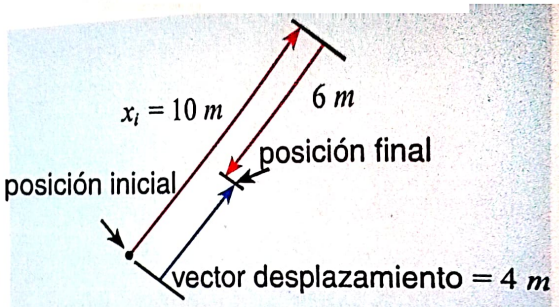


Figura 3.2

En forma gráfica:

Supongamos que la partícula parte del origen. Conforme el movimiento sea en línea recta, solo hay dos posibilidades, o el movimiento es positivo o es negativo. Así, cualquier dirección puede ser escogida como el eje x.

3.2 RAPIDEZ MEDIA

Todas las personas están acostumbradas a observar objetos que se están moviendo. Las personas se mueven de un lugar a otro en cierto tiempo, las aves vuelan de un árbol a otro recorriendo diferentes distancias en un intervalo de tiempo. Para saber que tan rápido se mueve un objeto, observamos que es importante conocer la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla. Esta relación se la conoce como rapidez media. La distancia recorrida no tiene que ser necesariamente en línea recta sino que puede tener una trayectoria cualquiera, sea esta curvilínea, a lo largo del perímetro de un cuadrado, etc.

La rapidez media se define como la distancia total recorrida dividida para el tiempo empleado.

$$\text{Rapidez media} = \frac{\text{Distancia recorrida}}{\text{Tiempo empleado}} \qquad R = \frac{d}{t} \text{ y sus unidades son } m/s \qquad (3.3)$$

Debido a que la distancia recorrida es una cantidad escalar, se concluye que la rapidez media es también un escalar. Debe recordarse que un escalar es una cantidad que solo tiene magnitud y sus correspondientes unidades.

La distancia recorrida no siempre es igual al módulo del desplazamiento; estas dos cantidades son iguales siempre y cuando el movimiento sea en línea recta y en la misma dirección.

Ejemplo 3.3 - Suponga que un objeto puede recorrer 6.00 km en 10.0 minutos. ¿Cuál es su rapidez media? Exprese su respuesta en m/s.

$$Rapidez\ media = \frac{6.00\ km}{10.0\ min} \times \frac{1000\ m}{1.00\ km} \times \frac{1\ min}{60\ s} = 10.0\ m/s$$

3.3 VELOCIDAD MEDIA

La velocidad media es una cantidad vectorial, es decir que a más de tener magnitud tiene dirección. Note que la rapidez media no nos dice nada acerca de la dirección. La velocidad media relaciona el desplazamiento realizado y el intervalo de tiempo. Debe recordarse que si una partícula se mueve de un lugar a otro, el desplazamiento es el vector que parte del punto inicial y se dirige al punto final (en línea recta); por lo tanto, la distancia recorrida por un objeto no siempre va a ser igual a la magnitud del desplazamiento, debido a que el desplazamiento es un vector, la velocidad media es un vector también.

La velocidad media se define como el desplazamiento dividido para el tiempo transcurrido.

$$\text{Velocidad media} = \frac{\text{Desplazamiento}}{\text{Tiempo empleado}} \qquad \vec{v}_m = \frac{\vec{x}_f - \vec{x}_i}{t_f - t_i} \qquad (3.4)$$

Ejemplo 3.4 - Un auto A se mueve en línea recta con una velocidad media de $25.0\ m/s$ durante $90.0\ s$. Otro auto B que parte $10.0\ s$ más tarde cubre una distancia de $150\ m$ más que el auto A y ambos llegan al mismo destino y al mismo tiempo. ¿Cuál es la velocidad media del auto B?

Solución: Auto A: $v_{mA} = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A}$ $\Delta x_A = v_{mA} \times \Delta t_A$ $\Delta x_A = 25.0\ m/s \times 90.0\ s$ $\Delta x_A = 2250\ m$

Por lo tanto, el auto B recorre: $\Delta x_B = \Delta x_A + 150m \rightarrow \Delta x_B = 2250m + 150m = 2400m$

Como el auto B parte $10.0\ s$ más tarde, el tiempo del B será de $80.0\ s$

Auto B: $v_m = \frac{2400m}{80.0\ s} = 30.0\ m/s$

3.4 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

La velocidad instantánea es igual a la velocidad media medida en un intervalo sumamente pequeño de tiempo, esta velocidad nos indica que tan rápido se mueve una partícula en cada instante durante el recorrido. La velocidad media depende del desplazamiento que tiene la partícula pero no nos dice nada sobre el movimiento que tuvo la partícula durante ese intervalo de tiempo.

Suponga que la partícula A cubre un desplazamiento a lo largo del eje $+x$ igual a Δx en un tiempo igual a Δt con rapidez constante. Otra partícula B, parte del mismo lugar que se movió la partícula A, y cubre el mismo desplazamiento Δx en el mismo tiempo Δt que lo hizo la partícula A. Esta partícula B al comienzo se movió con aceleración pero en el último tramo disminuyó su velocidad y cubrió el mismo desplazamiento Δx en el mismo intervalo de tiempo Δt. Debido a que las dos partículas recorrieron igual desplazamiento en igual intervalo de tiempo, sus velocidades medias son iguales. Debe notarse que la partícula A se movió con rapidez constante durante todo el intervalo de tiempo y que la partícula B lo hizo con rapidez variable; sin embargo, como las **dos partículas** cubrieron **el mismo desplazamiento en el mismo tiempo** sus **velocidades medias son iguales.** Por lo tanto, si la velocidad instantánea se la mide en un tiempo sumamente pequeño, entonces será igual a la velocidad media siempre que sea medida en un tiempo extremadamente pequeño.

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.5)$$

(Si Δt tiende a cero)

$$\vec{v}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (3.6)$$

Esto se lee: "límite cuando el tiempo tiende a cero de la velocidad media".

La dirección de la velocidad instantánea es tangente a la trayectoria. Cuando un objeto se lo deja caer desde cierta altura, el objeto tendrá infinitas velocidades instantáneas porque para cada instante muy pequeño de tiempo habrá una velocidad diferente.

3.5 ACELERACIÓN

Cuando la velocidad de un objeto cambia se dice que el objeto tiene una aceleración. El objeto puede cambiar la magnitud, la dirección o ambas de su velocidad y tendrá aceleración; es decir, la aceleración proviene del cambio del vector velocidad. Si el vector velocidad del objeto es constante (no cambia ni la magnitud ni la dirección) la aceleración será cero.

La aceleración media se define como:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_o}{t_f - t_o}$$ Las unidades de $\vec{a}$ son m/s^2 (3.7)

La aceleración instantánea es el valor de la aceleración media en un intervalo muy pequeño de tiempo.

$$\vec{a}_{ins} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$ (3.8)

La dirección de la aceleración es la misma que la del vector $\Delta\vec{v}$ (**vector cambio de velocidad**).

En este capítulo se estudiará solamente casos en los que la aceleración es constante. Cuando la aceleración de una partícula es constante y si la partícula se mueve en línea recta, se dice que la partícula tiene un movimiento rectilíneo uniformemente variado. Si la aceleración es cero, entonces el movimiento es rectilíneo uniforme. Para entender el concepto de aceleración se dará un ejemplo:

Ejemplo 3.5 - Suponga que un auto se mueve con una aceleración de 2 m/s^2 y que parte del reposo. En la tabla 3.1 se muestra la forma en que la velocidad del auto cambia con el tiempo, en la columna de la izquierda se observa que el tiempo se incrementa en 1s, en la columna de la derecha se observa la velocidad correspondiente a cada valor del tiempo. El valor de la aceleración igual a 2 m/s^2 significa que la velocidad de la partícula se incrementará en 2 m/s cada segundo de tiempo; si la aceleración fuera de - 2 m/s^2, significaría que la partícula está disminuyendo su velocidad en 2 m/s cada segundo de tiempo. Esto es correcto si la partícula se está moviendo hacia la derecha a lo largo del eje $+x$. Si la aceleración de la partícula fuera de 0 m/s^2, la velocidad de la partícula no estaría cambiando.

$t = 0$	$v = 0$
$t = 1s$	$v = 2m/s$
$t = 2s$	$v = 4m/s$
$t = 3s$	$v = 6m/s$
$t = 4s$	$v = 8m/s$
$t = 5s$	$v = 10m/s$
$t = 6s$	$v = 12m/s$
$t = 7s$	$v = 14m/s$
$t = 8s$	$v = 16m/s$
$t = 9s$	$v = 18m/s$

Tabla 3.1

Observe que cada vez que transcurre un segundo, la rapidez aumenta $2m/s$. Este valor es lo que se denomina aceleración

Si la aceleración de un cuerpo es de 3 m/s^2, significa que cada segundo el cuerpo incrementa su rapidez en 3 m/s. Como ejercicio, realice una tabla para el caso en que la aceleración sea de 3 m/s^2 y que el móvil parta del reposo, considere intervalos de tiempo de 1s en forma similar al ejemplo anterior.

En todos estos casos se ha visto que la rapidez inicial de la partícula ha sido cero, ¿pero cómo cambiaría nuestra tabla si la velocidad de la partícula fuera diferente de cero, por decir, rapidez inicial = 1 m/s? Suponga que la aceleración es 2 m/s^2. (ver tabla 3.2)

$t = 0$	$v = 0m/s + 1m/s = 1m/s$
$t = 1s$	$v = 2m/s + 1m/s = 3m/s$
$t = 2s$	$v = 4m/s + 1m/s = 5m/s$
$t = 3s$	$v = 6m/s + 1m/s = 7m/s$
$t = 4s$	$v = 8m/s + 1m/s = 9m/s$
$t = 5s$	$v = 10m/s + 1m/s = 11m/s$
$t = 6s$	$v = 12m/s + 1m/s = 13m/s$
$t = 7s$	$v = 14m/s + 1m/s = 15m/s$
$t = 8s$	$v = 16m/s + 1m/s = 17m/s$
$t = 9s$	$v = 18m/s + 1m/s = 19m/s$

Tabla 3.2

Observe que cada vez que transcurre un segundo, la rapidez aumenta $2m/s$; sin embargo, se debe aumentar el valor de la rapidez inicial que es de $1m/s$

Volviendo a la ecuación que define la aceleración:

$$\vec{a} = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \qquad (3.9)$$

donde $t_f - t_i$ es el intervalo de tiempo en el que ocurre el cambio de velocidad

Así,

$$\vec{a} = \frac{v_f - v_i}{t} \qquad (3.10)$$

Despejando v_f se obtiene:

$$v_f = v_i + at \qquad (3.11)$$

donde, v_f es la velocidad final después de que han transcurrido t segundos, v_i es la velocidad inicial, a es la aceleración y t es el intervalo de tiempo. Como la aceleración es constante, se puede escribir la velocidad media como:

$$\vec{v}_m = \frac{v_i + v_f}{2} \qquad (3.12)$$

Esta ecuación es aplicable solo para el *m.r.u.v.* es decir aceleración constante. $\vec{a}$ = **constante**

$$\Delta x = \vec{v}_m t\,; \quad \Delta x = \vec{v}_m t = \left(\frac{v_i + v_f}{2}\right) t \qquad (3.13)$$

Esta ecuación es aplicable solo para el *m.r.u.v.* es decir aceleración constante. $\vec{a}$ = **constante**

La ecuaciones (3.12) y (3.13) son válidas solo si la aceleración es constante.

Ejemplo 3.6 - Un carro de carrera parte con una velocidad inicial de $15.0\ m/s$ y acelera constantemente a razón de $3.0\ m/s^2$. Calcule su desplazamiento después de 10.0 segundos.

Solución: Usando la ecuación (3.11) se tiene: $v_f = v_i + at = 15.0\ m/s + 3.0m/s^2 \times 10.0\ s$; $v_f = 45\ m/s$

Usando la ecuación (3.12): $\vec{v}_m = \frac{v_i + v_f}{2} = \frac{15.0m/s + 45.0m/s}{2}$; $\vec{v}_m = 30.0m/s$

Usando la ecuación (3.13); $\Delta x = \vec{v}_m t = 30.0\ m/s \times 10.0\ s$; $\Delta x = 300\ m$

En estas ecuaciones, Δx es el desplazamiento. Se debe tomar en consideración que **la posición de una partícula sí depende de la ubicación del origen, mientras que el desplazamiento es independiente del lugar donde se encuentre el origen.**

Ejemplo 3.7 - Un carro que parte con una velocidad inicial de 10.0 m/s acelera a razón de 2.0 m/s^2 durante 10.0 segundos. Calcule su desplazamiento.

Solución: Este ejemplo es muy parecido al anterior y el método que se usó consistió en calcular la velocidad final con la ecuación (3.10) y luego calcular el desplazamiento con la ecuación (3.13)

$$v_f = v_0 + at = 10.0m/s + (2.0\ m/s^2 \times 10.0\ s) \qquad v_f = 30\ m/s$$

$$\Delta x = \frac{(v_0 + v_f)\,t}{2} = \frac{(10.0 + 30.0)m/s}{2} \times 10.0s \qquad \Delta x = 200\ m$$

Ahora vamos a resolver para Δx en forma literal y luego hallar una fórmula para calcular el desplazamiento.

Primero usamos la ecuación (3.11) $v_f = v_0 + at$ y luego la ecuación (3.13) $\Delta x = \frac{v_0 + v_f}{2} \times t$

Reemplazando la ecuación (3.11) en la (3.13)

$$\Delta x = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 + at)t = \frac{1}{2}(2v_0 t + at^2)$$

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (3.14)$$

En la ecuación 3.14,

Δx	v_0	t	a
Desplazamiento	Velocidad Inicial	Intervalo de tiempo	aceleración

Ejemplo 3.8 - Un avión parte del reposo y acelera constantemente a razón de 25.0 m/s^2, ¿cuál es su desplazamiento después de 10.0 s?

Solución:

Usando la ecuación (3.10) $v_f = v_0 + at \quad v_f = 0 + 25.0\ m/s^2 \times 10s \quad v_f = 250\ m/s$

Usando la ecuación (3.12): $\Delta x = \left(\frac{v_i + v_f}{2}\right)t = \left(\frac{0 + 250}{2}\right) m/s\ 10s \rightarrow \Delta x = 1250\ m$

Usando la ecuación (3.13) se puede llegar al mismo resultado anterior.

$$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2;\ x = 0 + \frac{1}{2}(25.0\ m/s^2)(10.0s)^2 = 1250\ m$$

Ejemplo 3.9 - Un objeto se mueve con velocidad constante de 3.0 m/s durante 5.0 segundos, ¿Cuál es la distancia total recorrida?

Solución: Este es un ejemplo en que un objeto se mueve con velocidad constante, calcule la distancia recorrida durante 5.0 s si su velocidad es de 3.0 m/s

$\Delta x = vt \rightarrow \Delta x = 3.0\ m/s \times 5.0s \rightarrow \Delta x = 15m$ Como el movimiento es en linea recta y en la misma dirección $|\Delta x| = d$

Ejemplo 3.10 - Una partícula recorre 1200 m en 10.0 minutos con velocidad constante, ¿Cuál es su velocidad en m/s?

Solución: De la fórmula; $\Delta x = vt$ se debe despejar la velocidad, sin embargo los minutos debemos transformarlos a segundos.

$$10.0\ min \times \frac{60s}{1\ min} = 600s \qquad v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{1200m}{600s} = 2.00\ m/s$$

Ejemplo 3.11 - En el fondo de un pozo de 680 m de profundidad ocurre una explosión, ¿en cuántos segundos usted escuchará el estruendo, conociendo que el sonido viaja en el aire con velocidad constante de 340 m/s?

Solución: Se debe aplicar la ecuación del movimiento rectilíneo uniforme $\Delta x = vt$

$$\Delta x = vt \rightarrow t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{680m}{340\ m/s} \rightarrow t = 2.00s$$

Ejemplo 3.12 - Una partícula pasa por el origen y se mueve con aceleración constante a lo largo de una línea recta, hacia la derecha. Después de recorrer durante 2.0 s, pasa por el punto A con una rapidez de 10.0 m/s y 100.0 m después pasa por el punto B con una rapidez de 30.0 m/s.

a) Calcule su velocidad inicial (en el origen).

b) Calcule el tiempo en que la partícula viaja de A a B.

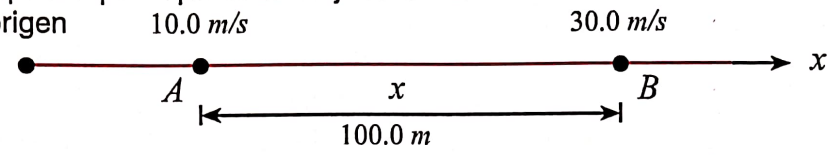


Figura 3.3

Solución:

a) Primeramente se debe calcular la aceleración de la partícula con los datos que se tienen entre los puntos A y B. (Ver figura 3.3)

De la ecuación: $v_B^2 = v_A^2 + 2ax$ se despeja la aceleración a.

$$a = \frac{v_B^2 - v_A^2}{2x} = \frac{(30.0\ m/s)^2 - (10.0\ m/s)^2}{2 \times 100m} = 4.00\ m/s^2$$

Usando la ecuación (3.10):

$v_f = v_0 + at$ Ahora, $v_f = v_A$ y despejando v_0 se obtiene:

$v_0 = v_A - at = 10.0\ m/s - 4.00\ m/s^2 \times 2.0s$ $v_0 = 2.0\ m/s$ velocidad en el origen

b) Para calcular el tiempo entre A y B, usamos la ecuación (3.10).

$v_f = v_o + at$ donde $v_f = v_B$ y $v_o = v_A$

$$v_B = v_A + at; \quad t = \frac{v_B - v_A}{a} = \frac{30.0\ m/s - 10.0\ m/s}{4.0\ m/s^2}; \quad t = 5.0\ s$$

Ejemplo 3.13 - Una motocicleta A arranca desde el reposo en el mismo instante en que otra motocicleta B la rebasa con una rapidez constante de 20m/s; si la motocicleta A mantiene una aceleración constante de 2 m/s^2, calcule:

a) El tiempo en que la motocicleta A rebasa a la motocicleta B.

b) La velocidad de la motocicleta A al momento en que alcanza a la otra.

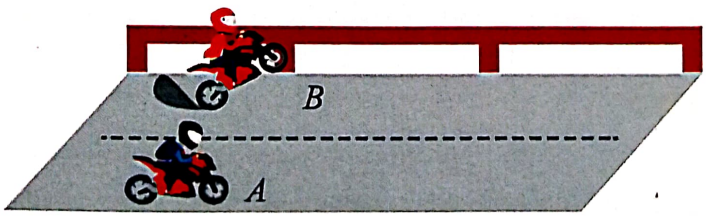


Figura 3.4

a) El desplazamiento de la motocicleta A es: $\Delta x = \frac{1}{2} a_A t^2$

El desplazamiento de la motocicleta B es: $\Delta x = v_B t$

Cuando la motocicleta A alcanza a la motocicleta B es cuando sus desplazamientos son iguales, por lo tanto, igualando las ecuaciones anteriores:

$$v_B t = \frac{1}{2} a_A t^2; \quad t = \frac{2v_B}{a_A} = \frac{2(20m/s)}{2m/s^2}; \quad t = 20s$$

b) La velocidad de la motocicleta A está dada por: $v_A = v_0 + at$ donde $v_0 = 0$ ya que parte del reposo.

$$v_A = 2\ m/s^2 \times 20s \qquad v_A = 40\ m/s$$

Se debe observar que en el momento en que la motocicleta A alcanza a la motocicleta B sus rapideces no son iguales. De hecho, a partir del momento en que la motocicleta A alcanza a la B, la primera se adelantará debido a que mantiene aceleración, en tanto que la B seguirá moviéndose con rapidez constante.

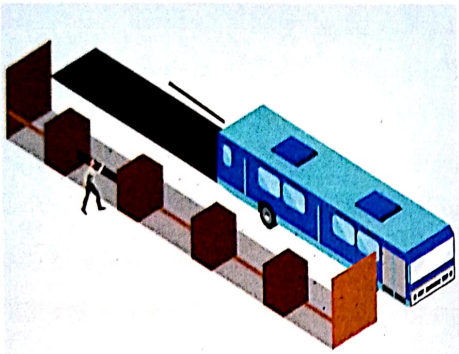


Figura 3.5

Ejemplo 3.14 - Un pasajero llega a la estación de autobuses 4 segundos después de la salida del bus, el cual acelera a razón de 0.5 m/s^2; si el pasajero puede correr con una rapidez constante de 4 m/s, ¿después de cuántos segundos desde que salió el bus el pasajero lo alcanza?, ¿qué distancia recorrió el pasajero hasta que alcanza al bus?

Solución:

Suponga que el tiempo que el bus se mantiene en movimiento hasta ser alcanzado por el pasajero es t, por lo tanto, el desplazamiento del autobús será: $\Delta x = \frac{1}{2} at^2$

El desplazamiento del pasajero debe ser igual al desplazamiento del bus, por lo tanto: $\Delta x = v_p (t - 4)$ donde v_p representa la rapidez constante del pasajero ($v_p = 4m/s$), y $(t - 4)$ es el tiempo que tiene el pasajero para alcanzar al bus. Igualando los desplazamientos:

$$\frac{1}{2} at^2 = v_p (t - 4) \rightarrow 2v_p t - 8v_p = 0.5t^2 \rightarrow t^2 - 4v_p t + 16v_p = 0$$

$$t^2 - 4(4)t + 16(4) = 0 \rightarrow t^2 - 16t + 64 = 0 \rightarrow t = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4(1)(64)}}{2}$$

$$t = 8s$$

El valor de $t = 8s$ es el tiempo desde que el bus salió de la estación hasta que es alcanzado por el pasajero. Por lo tanto, el pasajero alcanzó al bus después de solamente $4s$.

La distancia que recorre el pasajero es $\Delta x = v_p (t - 4) = 4\ m/s\ (8 - 4)s = 16m$.

3.6 CAÍDA LIBRE

Caída libre es un caso especial del movimiento rectilíneo uniformemente variado; la única diferencia es que se debe cambiar la aceleración a por g en las ecuaciones del $m.r.u.v.$ El valor es 9.8 m/s^2, sin embargo, en este capítulo usaremos $g = 10\ m/s^2$.

Cuando se habla de caída libre, se dice que es la caída de los cuerpos en la que no se considera la resistencia del aire (es decir en el vacío). En este texto se considerarán casos en los que no se toma en cuenta la resistencia del aire a menos que se diga lo contrario expresamente en el problema. Un caso que es importante

anotar es el hecho de que dos cuerpos que tienen diferente masa y que son soltados desde la misma altura toman el mismo tiempo en llegar al suelo. Es decir, los cuerpos caen a la superficie de la Tierra con la misma aceleración sin importar la masa del objeto que se suelta. Cuando un cuerpo es lanzado hacia arriba, como en todos los casos, no se considera la resistencia del aire, cuando vuelve al suelo llega con la misma rapidez con la que fue lanzado.

En las ecuaciones de caída libre, se debe entender que la variable "y" significa posición y no distancia recorrida. Además, **tomando en consideración el eje cartesiano como positivo hacia arriba y negativo hacia abajo**, y tomando en cuenta que la aceleración de la gravedad está dirigida hacia abajo, siempre se considerará a la aceleración de la gravedad - $10\ m/s^2$.

Las ecuaciones (3.15), (3.16) y (3.17) ya incluyen el signo negativo, por lo tanto, cuando se tenga que reemplazar el valor de la aceleración de la gravedad en alguna de las fórmulas dadas se deberá escribir $+10\ m/s^2$ por lo expuesto anteriormente.

Ecuaciones del *m.r.u.v.*	Ecuaciones de caída libre **(asumiendo positivo hacia arriba)**	
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} gt^2$	(3.15)
$v_f^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$	(3.16)
$v_f = v_0 + at$	$v_y = v_{0y} - gt$	(3.17)

Tabla 3.3

En esta tabla 3.3, en la columna de la izquierda están las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, y en la columna de la derecha las ecuaciones de la caída libre de los cuerpos. Debe notarse que las ecuaciones de la columna de la izquierda con las de la derecha tienen la misma forma; los únicos cambios son: en lugar de llamar al desplazamiento $x - x_0$ se lo llama $y - y_0$; en lugar de v_f ahora es v_y; y finalmente, en lugar de v_0 se tiene v_{0y}. Con estos cambios, las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente variado, fácilmente, se convierten en las ecuaciones de caída libre.

Ejemplo 3.15 - Una piedra es lanzada directamente hacia arriba, desde el nivel del suelo, con una rapidez inicial de $20\ m/s$. Calcule: Use $g = 10\ m/s^2$

a) El tiempo en que alcanza su altura máxima.

b) La altura máxima.

c) La rapidez con que regresa al suelo.

d) La rapidez cuando se encuentra a $10.2\ m$ del suelo mientras la piedra sube y mientras baja.

Solución: La cantidad $20\ m/s$ representa la magnitud de la velocidad inicial, esta velocidad es positiva ($+20\ m/s$) porque está dirigida hacia arriba.

La piedra alcanza su altura máxima cuando su velocidad en y es cero ($v_y = 0$); por lo tanto, de la ecuación (3.17), con su respectivo sistema de referencia **(asumiendo positivo hacia arriba)** se tiene:

a) $v_y = v_{0y} - gt \quad \rightarrow \quad 0 = v_{0y} - gt \quad \rightarrow \quad t = \frac{v_{0y}}{g}$

$$t = \frac{20\ m/s}{10\ m/s^2} \qquad t = 2.0\ s$$

b) Cuando la piedra llega a su altura máxima, $v_y = 0$

La cantidad y_0 representa la posición inicial, y si la referencia es la superficie de la Tierra, entonces $y_0 = 0$.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \quad \rightarrow \quad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy \quad \rightarrow \quad 0 = v_{0y}^2 - 2gy_{max}$$

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \quad \rightarrow \quad y_{max} = \frac{(20\ m/s)^2}{(2)(10\ m/s^2)} \quad \rightarrow \quad y_{max} = 20\ m$$

c) Cuando la piedra regresa al suelo, entonces $y = 0$ y como la posición inicial también es cero ($y_0 = 0$), usando la ecuación (3.17) y considerando que el tiempo es dos veces el tiempo de subida:

$$v_y = v_{0y} - gt; \qquad v_y = 20\ m/s - 10\ m/s^2 \times (4.0\ s); \qquad v_y = -20\ m/s$$

Observe que la rapidez inicial es de +20 *m/s*. Es decir, en planos horizontales la velocidad de la partícula tiene la misma magnitud, la diferencia solo está en el signo. Esto se puede entender ya que el valor positivo de la velocidad es cuando la partícula sube y aquel con signo negativo es cuando la partícula baja.

El literal (c) también se puede calcular usando la ecuación (3.16): $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$.

Ya que la piedra regresa al suelo, el desplazamiento $(y - y_0)$ es igual a cero y haciendo esto en la ecuación (3.16), queda:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(0 - 0) \qquad v_y = \pm v_{0y}$$

Se escoge el signo negativo debido a que la piedra está bajando. Así, $v_y = -v_{0y} = -20\ m/s$

d) Se procede a calcular la rapidez de la partícula cuando se encuentre a 10.2 *m* del suelo cuando está subiendo. Cuando la partícula está bajando y se encuentra a 10.2 *m* del suelo su velocidad tendrá el mismo valor que cuando estaba subiendo pero con signo negativo.

Usando la ecuación (3.16)

$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ donde $y_0 = 0$ que es la posición inicial.

$$v_y = \pm\sqrt{v_{0y}^2 - 2gy}; \qquad v_y = \pm\sqrt{(20m/s)^2 - 2(10m/s^2)(10.2m)}; \qquad v_y = \sqrt{196\ m/s};$$

$v_y = \pm 14.0 m/s$

El signo positivo indica que **la partícula está subiendo** y que su velocidad es +14.0 *m/s*, **el signo negativo** indica que **la partícula está bajando** y que su velocidad es - 14.0 *m/s*; en ambos casos la partícula se encuentra a +10.2 *m* sobre la superficie de la Tierra.

Se puede probar que $v_y = 0$ usando el tiempo que le tomó a la partícula en alcanzar su altura máxima.

Usando la ecuación (3.17) $v_y = v_{0y} - gt$ donde t es el tiempo de subida que en este caso es 2.0*s*, procedemos a reemplazar estos datos.

$$v_y = 20\ m/s - 10\ m/s^2 \times 2.0\ s \qquad v_y = 0$$

Ejemplo 3.16 - Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra directamente hacia arriba con una velocidad inicial de 20.0 *m/s*. Si el tiempo en que la piedra llega al suelo es de 6.0*s*, calcule:

a) La altura máxima.

b) El tiempo hasta que alcanza su altura máxima.

c) La altura del edificio.

Solución

a) La altura máxima ocurre cuando la velocidad en ese punto es igual a cero. Es decir, cuando $v_y = 0$

Usando: $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0)$ $\rightarrow$ $0 = v_{0y}^2 - 2g(y_{max} - 0)$

$$y_{max} = \frac{v_{0y}^2}{2g} \rightarrow y_{max} = \frac{(20.0\ m/s)^2}{2 \times 10\ m/s^2} \rightarrow y_{max} = 20.0m$$

b) El tiempo hasta que alcanza su altura máxima ocurre cuando $v_y = 0$

Usando la ecuación: $v_y = v_{0y} - gt$ $\rightarrow$ $0 = v_{0y} - gt_{sub}$

$$t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g} \rightarrow t_{sub} = \frac{20.0\ m/s}{10\ m/s^2} \rightarrow t_{sub} = 2.0s$$

c) Para calcular la altura del edificio, se debe calcular "Δy" cuando el tiempo es $6.00\ s$. Ya que ese valor de "Δy" es el desplazamiento, que es el vector que va desde el punto donde fue lanzada la piedra hasta el suelo, y esa magnitud es justamente la altura del edificio,

Usando la ecuación: $y - y_0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

$$y - y_0 = 20.0\ m/s \times 6.00s - \frac{1}{2} \times 10\ m/s^2 \times (6.00s)^2 \rightarrow y - y_0 = -60\ m$$

Por lo tanto, la altura del edificio será: $+60\ m$.

Ejemplo 3.17 - Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra directamente hacia arriba con una velocidad inicial de $30.0m/s$, y después de $4.0\ s$ se deja caer una segunda piedra desde el mismo lugar donde se lanzó la primera.

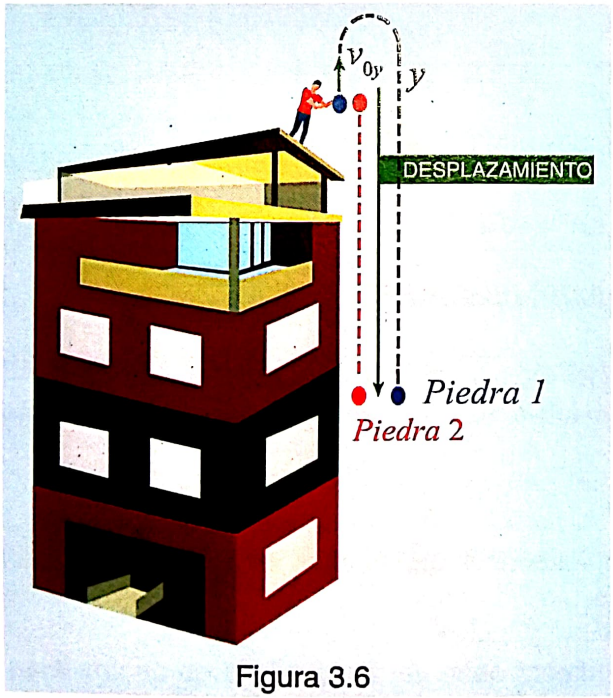


Figura 3.6

Calcule el tiempo en que la primera piedra alcanza a la segunda.

Solución: Se observa que en el momento que la primera piedra alcanza a la segunda, sus desplazamientos son iguales. Por lo tanto:

$y_1 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ (desplazamiento de la piedra 1)

donde t representa el tiempo de la primera piedra y como la segunda piedra sale $4s$ después, su tiempo será $(t - 4)s$.

Considerando que la velocidad inicial es cero:

$y_2 = -\frac{1}{2}g(t - 4)^2$

desplazamiento de la piedra 2.

Como los dos desplazamientos son iguales, $y_1 = y_2$

$$v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g(t - 4)^2 \rightarrow v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}(gt^2 - 8gt + 16g)$$

$$v_{0y}t = 4gt - 8g \rightarrow t = \frac{8g}{4g - v_{0y}} \rightarrow t = \frac{8\ s^2\ (10m/s^2)}{4\ s\ (10m/s^2) - 30.0\ m/s} = 8.0s$$

Ejemplo 3.18 - Desde un acantilado de 100 m de altura se deja caer una piedra P_1 mientras que desde el fondo del acantilado y al mismo tiempo se lanza una piedra P_2 con una rapidez de 50 m/s dirigida hacia arriba, como se muestra en la figura 3.7. Cuando las piedras se cruzan están viajando en direcciones opuestas. Calcule la altura, medida desde el fondo del acantilado, en la que las piedras se cruzan.

Solución: Se escoge el nivel de referencia como se indica en la figura 3.7; por lo tanto, al inicio, la piedra P_1 se encuentra a $100m$ arriba del nivel de referencia.

La posición inicial de la piedra P_1 es: $y_{01} = 100m$.

La posición inicial de la piedra P_2 es: $y_{02} = 0$. Cuando las piedras se cruzan, la posición final de ellas va a ser la misma ya que la posición final se mide desde el nivel de referencia hasta el punto de cruce ($y_1 = y_2$).

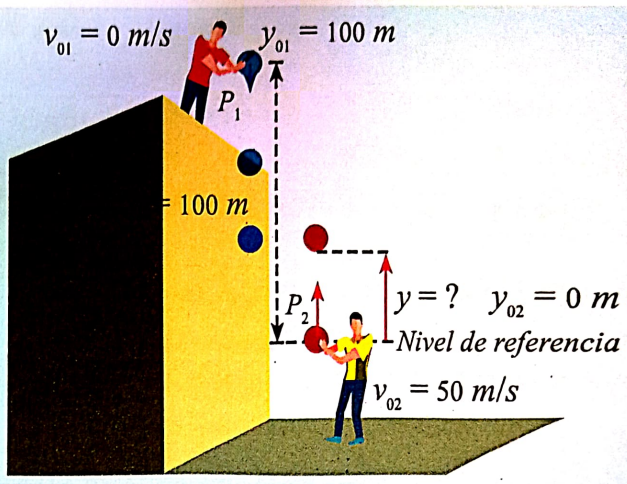


Figura 3.7

Así, igualando las posiciones finales de las dos piedras se puede calcular el tiempo en que las dos piedras se cruzan.

Aplicando la ecuación: $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ a las dos piedras, se tiene que:

Piedra P_1: $y_1 = y_{01} - \frac{1}{2}gt^2$ Piedra P_2: $y_2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

Cuando las piedras se cruzan, $y_1 = y_2$; por lo tanto:

$$y_{01} - \frac{1}{2}gt^2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad t = \frac{y_{01}}{v_{0y}} = \frac{100\ m}{50\ m/s} = 2.0\ s$$

Es decir, después de 2.0s de haberse iniciado el movimiento, las dos piedras se cruzan.

P_2 ha subido: $y_2 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 = 50\ m/s(2.0s) - \frac{1}{2}(10\ m/s^2)(2.0s)^2 = 80m$

Y podemos comprobar que en el tiempo de 2.0s, P_1 debe haber bajado 20.0 m.

La distancia que cae la piedra P_1 es: $\frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10m/s^2 \times (2.0s)^2 = 20.0\ m$

3.7 GRÁFICOS EN LA FÍSICA

Cuando una partícula se mueve en una dirección (movimiento unidimensional), muchas veces es conveniente resolver el problema mediante el uso de gráficos.

Se debe entender que en el gráfico solo se representa el movimiento de la partícula a lo largo de una línea recta, ya sea en una dirección o en la dirección opuesta. Por ejemplo, si la partícula se mueve sobre el eje de las x, su movimiento puede ser hacia la derecha o hacia la izquierda. Así como se puede mover la partícula a lo largo del eje de las x, también puede hacerlo a lo largo del eje de las y o a lo largo de cualquier línea recta.

3.8 GRÁFICO POSICIÓN VS. TIEMPO

A este gráfico se lo denomina usualmente: gráfico x *vs.* t. La posición está representada a lo largo de un eje vertical y en la abscisa se representa el tiempo. El gráfico x *vs.* t muestra cómo la posición de la partícula varía con el tiempo. En todo momento la partícula se mueve en línea recta. Existe bastante información que se puede obtener de los gráficos. En el caso del gráfico posición *vs.* tiempo, la pendiente de la curva es igual a la velocidad de la partícula. Debe entenderse que los gráficos representan el movimiento de una partícula en línea recta.

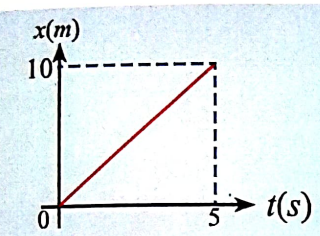


Figura 3.8

PARTÍCULA QUE PARTE DEL ORIGEN Y SE MUEVE CON VELOCIDAD CONSTANTE

Este gráfico de la figura 3.8, indica que la partícula sale del origen ($x = 0\ m$), y que recorre $10\ m$ en 5 segundos. Se sabe que se mueve con rapidez constante porque la línea inclinada es una línea recta.

La pendiente de la recta inclinada nos da el valor de la velocidad y como es una pendiente positiva, indica que la velocidad es positiva.

En el gráfico de la figura 3.8, la pendiente es igual a $2\ m/s$; es decir, la partícula se mueve en línea recta durante 5 segundos con una velocidad de $2\ m/s$, y en ese tiempo recorre $10\ m$. En el gráfico de la figura 3.9, se muestra el movimiento de una partícula en línea recta cuya velocidad es negativa. Se observa que la partícula también parte del origen y que recorre $10\ m$ en los primeros 5 segundos, debe notarse que se mueve hacia la izquierda del origen, por lo tanto, debido a que la partícula se mueve hacia el lado negativo (hacia la izquierda), su velocidad es negativa.

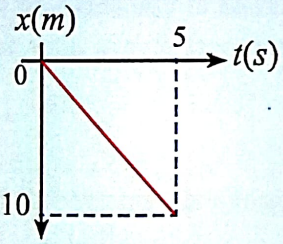


Figura 3.9

Además, la pendiente de la gráfica de la figura 3.9 es negativa lo que implica que la velocidad es negativa.

Debe entenderse como negativa que se mueve hacia la izquierda. Aunque la partícula se encuentre en la zona positiva, por el hecho de moverse hacia la izquierda su velocidad es negativa.

INTERPRETACIÓN DEL GRÁFICO DE LA FIGURA 3.9

En la figura 3.10, se muestra el eje x, el origen 0 y la flecha roja que indica la dirección del movimiento de la partícula. Observe que la partícula parte del origen y se mueve hacia la izquierda del eje de las x.

En este caso la pendiente, que es la velocidad, tiene un valor de - $2\ m/s$.

Este gráfico también indica que después de $5\ s$ de haber iniciado su movimiento, la partícula ha recorrido $10\ m$ hacia la izquierda como se lo puede verificar en el gráfico de la figura 3.10.

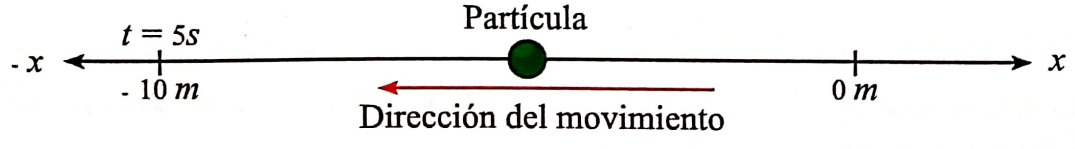


Figura 3.10

Ejemplo 3.19 - Interprete el gráfico mostrado a continuación.

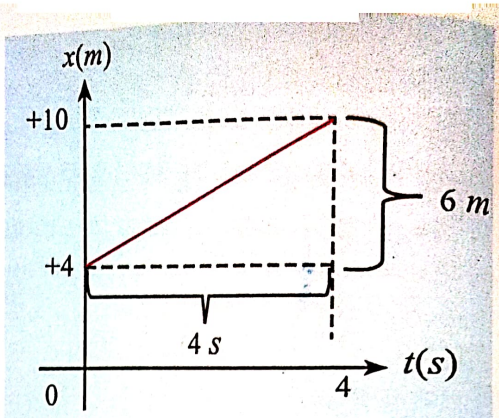


Figura 3.11

En este caso la partícula inicia el movimiento desde una posición inicial de 4 m ubicada a la derecha del origen y se mueve en línea recta durante 4s.

Cuando han transcurrido 4 segundos, la partícula se encuentra a 10 m del origen; es decir que tuvo un desplazamiento de 6 m durante un tiempo de 4 segundos.

Observe que su velocidad es positiva y constante. La pendiente de esta recta nos da el valor de la velocidad.

CÁLCULO DE LA PENDIENTE DE LA RECTA.

$$\text{pendiente} = \frac{\text{cateto vertical}}{\text{cateto horizontal}} = \frac{+6\ m}{4s} = 1.5\ m/s$$

La velocidad de la partícula tiene un valor de 1.5 m/s.

A partir del gráfico que se muestra en la figura 3.11 se calcula la velocidad media de la partícula. Si la partícula inicia su movimiento en $x = 4m$ y se mueve hasta $x = 10m$, su desplazamiento es $\vec{\Delta x} = +6m$, en un intervalo de tiempo de 4 segundos.

$$\vec{v}_m = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{+6\ m}{4s} = +1.5\ m/s \text{ hacia la derecha.}$$

Se observa que cuando una partícula se mueve con velocidad constante, su velocidad tiene la misma magnitud y dirección que su velocidad media. Esto siempre es válido si la partícula se mueve en una sola dirección.

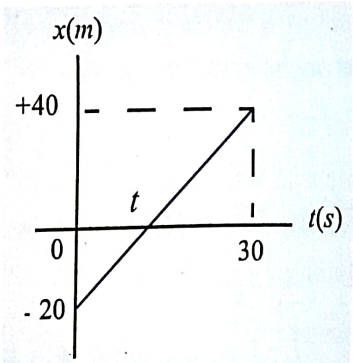


Figura 3.12

Ejemplo 3.20 - Para el gráfico de la figura 3.12, calcule la velocidad de la partícula para $t = 3.0\ s$; su velocidad media para todo el recorrido y el valor del tiempo cuando pasa por el origen.

Solución

Como el movimiento es con velocidad constante, entonces la velocidad de la partícula es igual a la velocidad media.

La velocidad se la encuentra calculando la pendiente de la recta.

$$v_m = \frac{40m - (-20m)}{30s} = 2m/s \quad \rightarrow \quad v_m = 2\ m/s$$

La velocidad de la partícula para $t = 3s$ es de $2m/s$. De hecho, la velocidad para cualquier tiempo entre 0 y $30s$ es de $2m/s$.

Para calcular el valor de t (para el cual la partícula pasa por el origen) se realiza una relación de triángulos semejantes.

$$\frac{40}{30 - t} = \frac{20}{t} \quad \rightarrow \quad 40t = 600 - 20t$$

Resolviendo para t: $t = 10s$.

Para $t = 10s$ la partícula pasa por el origen y continúa moviéndose en la misma dirección; bajo ningún concepto, la partícula cambia la dirección del movimiento.

Ejemplo 3.21 - El gráfico mostrado mostrado en la figura 3.13 representa el movimiento de una partícula en línea recta.

a) Calcule la velocidad media entre 0 y 5 segundos.

b) Calcule la velocidad para $t = 6s$.

c) Calcule el tiempo t cuando la partícula pasa por el origen.

d) Calcule la velocidad media de la partícula para todo el recorrido.

e) Calcule la velocidad media para el intervalo entre 20 y $30s$.

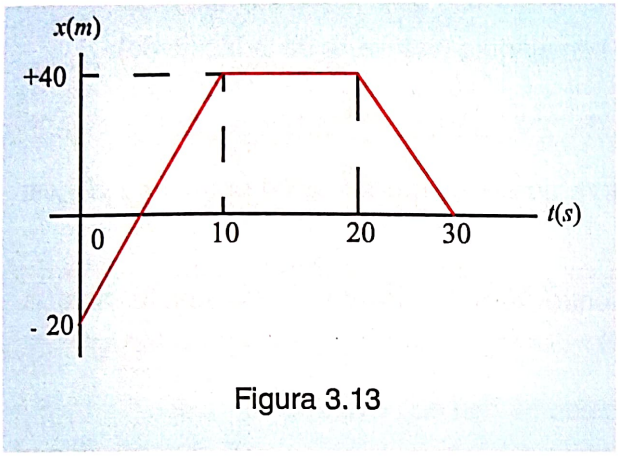


Figura 3.13

Solución

a) La velocidad de la partícula entre 0 y $5s$ es la misma que entre 0 y $10s$.

$$v = \frac{40m - (-20m)}{10s} = 6.0\ m/s$$

b) Para $t = 6s$, la velocidad es la misma que para el intervalo de 0 a $10s$ y eso es $6m/s$

c) Relacionando triángulos equivalentes: $\frac{60}{10} = \frac{20}{t}$ $\quad t = 3.3s$

d) Se observa que el desplazamiento entre 0 y 30 s es +20 m. Por lo tanto: $v_m = \frac{+20\ m}{30\ s} = 0.67\ m/s$

e) La pendiente está dada por: $v = \frac{(0 - 40)\ m}{10\ s} = -\ 4.0\ m/s$

Ejemplo 3.22 - El gráfico de la figura 3.14, representa el movimiento de una partícula en línea recta. Calcular:

a) La posición x para $t = 20\ s$.

b) La velocidad de la partícula para $t = 17.5s$.

c) La posición de la partícula para $t = 16s$.

d) El desplazamiento entre 10 y $60s$.

e) La velocidad media en el intervalo entre 20 y $50s$.

f) El desplazamiento entre 0 y $60s$.

g) La distancia total recorrida durante todo el intervalo de tiempo.

h) La rapidez media en el intervalo entre 10 y $50s$.

i) Las veces que la partícula pasa por el origen y el valor de esos tiempos.

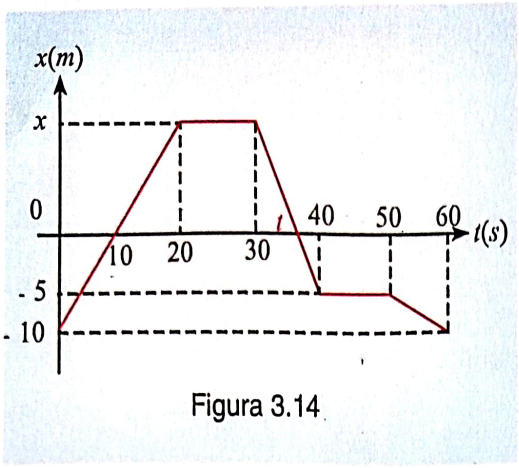


Figura 3.14

Solución

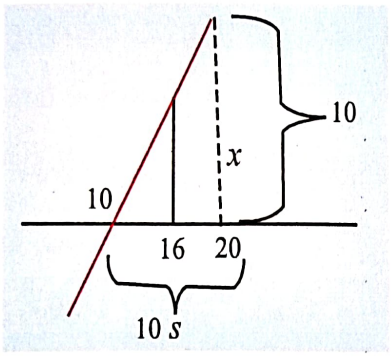
a) Para calcular el valor de x realizamos las relaciones entre triángulos semejantes

$$\frac{x+10}{20} = \frac{10}{10} = \text{Resolviendo}$$

para x $\qquad x = 10\ m$

b) La velocidad de la partícula es la misma entre 0 y 20s, por lo tanto la velocidad para 17.5 s es:

$$v = \frac{10m - (-10m)}{20s} = 1\ m/s$$ que es la pendiente de la recta.



c) Mediante triángulos semejantes (ver figura de la izquierda):

$$\frac{10}{10} = \frac{x}{6} \qquad x = 6m$$

d) Del gráfico se observa que el desplazamiento entre 10 y 60s es: - 10m

e) El desplazamiento entre 20 y 50s es de - 15m, por lo tanto la velocidad media será:

$$v_m = \frac{\text{desplazamiento}}{\text{tiempo}} = \frac{-15m}{50s - 20s} = -0.5\ m/s$$

f) Del gráfico se observa que el desplazamiento es *cero*.

g) Observando detenidamente el gráfico, la distancia recorrida es igual a 40m.

h) La distancia recorrida entre 10 y 50s es igual a 25m, por lo tanto la rapidez media en ese intervalo de tiempo es:

$$\text{rapidez media} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{intervalo de tiempo}} = \frac{25m}{40s} = 0.62\ m/s$$

i) La partícula pasa por el origen dos veces, la primera cuando $t = 10s$ y la segunda de acuerdo a la relación de triángulos equivalentes

$$\frac{10}{t - 30} = \frac{5}{40 - t}$$ resvolviendo para t: $t = 36.7s$

Ejemplo 3.23 - Una partícula A se mueve a una velocidad de 8 m/s, mientras que otra partícula B a - 6m/s. Ambas partículas se mueven en línea recta. En el gráfico de la figura 3.15 se observa que las partículas se cruzan cuando $t = 10s$. Calcule la distancia entre las partículas cuando el tiempo es igual a cero.

En este ejemplo se pide calcular la distancia $x_1 + x_2$ y esto lo podemos hallar usando la pendiente de las dos rectas A y B

$pendiente\ A = 8\ m/s = \frac{x_2}{10}$; $x_2 = 80m$ (esta es la distancia recorrida por la particula A)

$pendiente\ B = 6\ m/s = \frac{x_1}{10}$; $x_1 = 60m$ (esta es la distancia recorrida por la particula B)

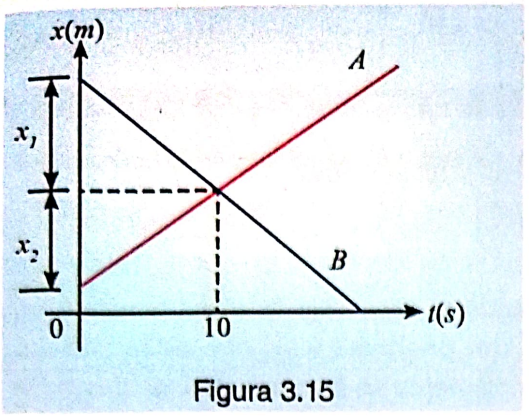


Figura 3.15

Distancia entre partículas = 140 m

para $t = 0$.

Otra forma de resolver el ejemplo 3.23 es colocando, sobre una línea recta, las partículas A y B a una distancia de $x_1 + x_2$ entre ellas como se muestra en la figura 3.16.

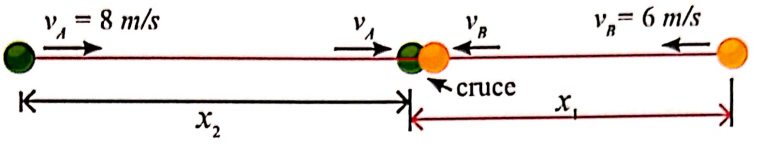


Figura 3.16

Aplicando las ecuaciones de cinemática: $x_2 = v_A t = 8\ m/s \times 10s = 80m$

$x_1 = v_B t = 6\ m/s \times 10s = 60m$ $\quad x_1 + x_2 = 140m$ (esta es la distancia de separación de las particulas $a\ t = 0$)

Se observa que con ambos procedimientos se llega al mismo resultado

3.9 GRÁFICO VELOCIDAD VS. TIEMPO

El movimiento de una partícula en línea recta puede representarse usando un gráfico velocidad *vs.* tiempo. En la ordenada se grafica la velocidad y en la abscisa el tiempo.

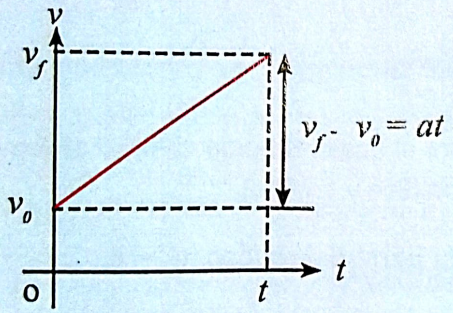


Figura 3.17

En este tipo de gráfico la ***pendiente de la curva representa la aceleración y el área bajo la curva, el desplazamiento.*** En el gráfico de la figura 3.17, una partícula parte con velocidad inicial v_0 para $t = 0$ y el movimiento es con aceleración constante.

Se observa que para un tiempo posterior t, la partícula alcanza la velocidad v_f. Como la línea que representa este movimiento es una recta, indica que la aceleración es constante.

Ejemplo 3.24 - El gráfico de la figura 3.18 representa el movimiento de una partícula en línea recta. Suponga que para $t = 0$ la partícula parte del origen y tiene una velocidad inicial de +30 m/s. Después de recorrer 10 segundos su velocidad es de - 20 m/s Calcule:

a) La aceleración de la partícula.

b) El valor del tiempo en que la partícula cambia de dirección.

c) El desplazamiento y la distancia recorrida durante los 10 s.

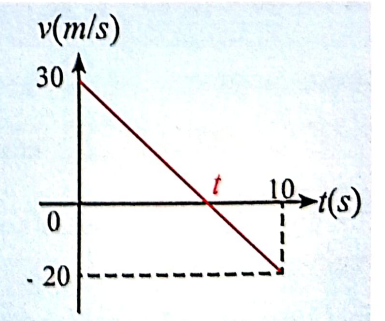


Figura 3.18

Solución

a) La aceleración es igual a la pendiente de la recta. $a = \frac{(-20 - 30)\ m/s}{10\ s} = -5.0\ m/s^2$

b) La partícula cambia de dirección para t segundos. Por relación de triángulos: $\frac{30}{t} = \frac{50}{10}$ $\quad t = 6.0\ s$

c) El área bajo la curva es el desplazamiento $\frac{1}{2}(30 \times 6)\ m - \frac{1}{2}(4 \times 20)\ m = 50\ m$

La distancia recorrida $= \frac{1}{2}(30 \times 6)\ m + \frac{1}{2}(4 \times 20)\ m = 130\ m$

En el gráfico de la figura 3.18, el desplazamiento se calcula midiendo el área bajo la curva teniendo en cuenta lo siguiente: las **áreas que están sobre el eje del tiempo son positivas** y las que están **debajo, son negativas**. Sin embargo, para calcular la distancia recorrida simplemente se suman todas las áreas sin considerar los signos de las mismas. La partícula parte en $t = 0$ con una velocidad inicial de $30\ m/s$ y empieza a disminuir su velocidad llegando a cero después de $6s$ y habiendo recorrido $90\ m$ (el área del triángulo superior). A partir de los $6s$ la partícula adquiere una velocidad negativa; por lo tanto, esta regresa y este desplazamiento es negativo. Sin embargo, la distancia recorrida es la suma de todos los desplazamientos sin importar el signo de los mismos.

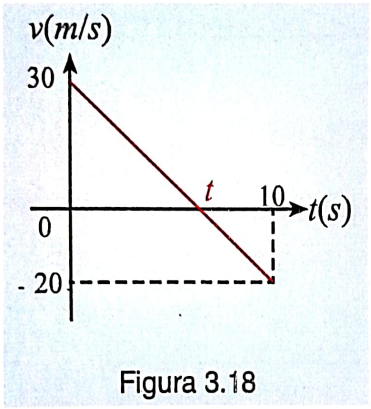


Figura 3.18

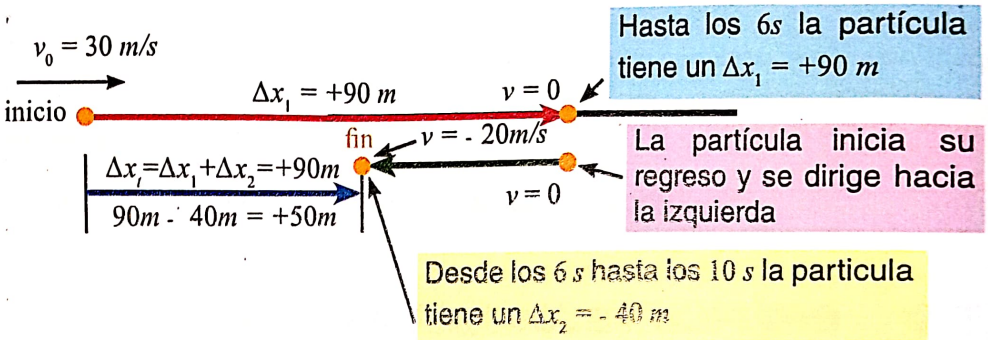


Figura 3.19

Se debe recordar que el desplazamiento es el vector que va desde el punto inicial hasta el punto final a donde llega la partícula. La distancia recorrida es la suma de todos los desplazamientos. En este caso es $90m + 40m$ lo que da un total de $130m$.

Ejemplo 3.25 - Un cuerpo se suelta desde una altura de $125.0\ m$ sobre el suelo. Se pide calcular el tiempo que dura la caída y la rapidez al llegar al suelo (Resolver por método analítico y gráfico).

Solución Método Analítico: $\Delta y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ como la partícula parte del reposo, $v_{0y} = 0$.

Por lo tanto el desplazamiento Δy es igual a: $\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2$

despejando el tiempo: $t = \sqrt{\frac{-2(-125.0m)}{10\ m/s^2}} = 5.0\ s$

La velocidad para $t = 5s$ es: $v_y = v_{0y} - gt$

Reemplazando $v_{0y} = 0 \quad \rightarrow \quad v_y = -10\ m/s^2 \times 5s \quad \rightarrow \quad v_y = -50\ m/s$

Resolviendo este problema usando método gráfico, procedemos de la siguiente

La figura 3.20 representa como varía la velocidad v_y con el tiempo en la caída del cuerpo.

La pendiente del gráfico de la figura 3.20 (velocidad vs tiempo) representa la aceleración de la gravedad que es igual a $-10\ m/s^2$.

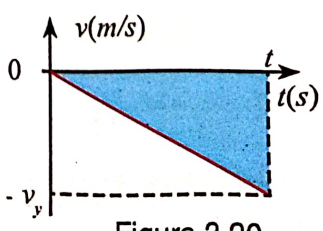


Figura 3.20

Calculando la pendiente se tiene: $-10\ m/s^2 = \frac{v_y}{t}$ donde $v_y = -10\ m/s^2(t)$

El área de la figura 3.20 (gráfica velocidad vs tiempo) representa el desplazamiento $\Delta y = \text{área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

Reemplazando este dato en la ecuación anterior: $-125 = \frac{1}{2}(t)(v_y)$

$$-125 = \frac{1}{2}(t)(10\ m/s^2(t))$$

Y, despejando el tiempo queda: $t = 5.0\ s$

Por lo tanto, la velocidad v_y se calcula usando la ecuación $v_y = -10\ t$

$$v_y = -10\ m/s^2(t)$$

Reemplazando el tiempo, queda: $v_y = -50\ m/s$

El área de este triángulo sombreado es igual a $\Delta y = -125.0\ m$. Se puede comprobar que la pendiente de la recta es igual a $-10.0\ m/s^2$ que es la aceleración de la gravedad

Ejemplo 3.26 - Desde lo alto de un edificio se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 20 *m/s* llegando al suelo después de 6.0 *segundos* de haber sido lanzada. Calcule:

a) La altura del edificio.

b) La distancia total recorrida por la piedra.

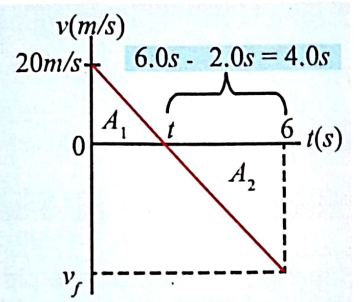


Figura 3.21

Solución: La altura del edificio es la magnitud del desplazamiento de la piedra que está dado por la suma algebraica de las dos áreas (A_1 y A_2).

Primero hallaremos el tiempo *t*. Debido a que la pendiente de la recta es la aceleración de la gravedad *g*:

$$10\ m/s^2 = \frac{20\ m/s}{t} \qquad t = 2.0\ s$$

Por relación de triángulos equivalentes:

$$10 = \frac{v_y}{4.0}\ ; \qquad v_f = -40\ m/s$$

La altura del edificio es igual a $A_1 + A_2$ considerando que el área A_2 es negativa.

$$\Delta y = \frac{1}{2}(2.0s)(20\ m/s) - \frac{1}{2}(4.0s)(40.0m/s) \qquad \Delta y = -60.0m$$

Por lo tanto,la altura del edificio es de 60.0*m*

La distancia recorrida por la piedra es $A_1 + A_2$ considerando que el área A_2 es positiva.

$$d = \frac{1}{2}(2.0s)(20m/s) + \frac{1}{2}(4.0s)(40.0m/s) \qquad d = 100.0m$$

Ejemplo 3.27 - Una partícula parte con una velocidad inicial de +30*m/s* y después de 10*s* su velocidad es de -20*m/s*, manteniendo aceleración constante durante todo el trayecto, calcúle la distancia recorrida por la partícula.

Solución

Si la velocidad inicial es positiva, esto implica que la partícula se mueve hacia la derecha, si luego su velocidad es negativa, implica que se mueve hacia la izquierda; Por lo tanto, en algún momento la partícula cambió de dirección. Pero, para cambiar la dirección de su movimiento, su velocidad llegó a cero.

$$a = \frac{v_y - v_0}{t} = \frac{-20\ m/s - 30\ m/s}{10\ s} \qquad \rightarrow \qquad a = -5.0\ m/s^2$$

Llamaremos tramo 1 al movimiento que realiza la partícula desde el instante que parte del origen hasta que se detiene, en este tramo la partícula tiene un desplazamiento x_1.

tramo 1: $v_y^2 = v_0^2 + 2ax_1 \qquad 0 = (30m/s)^2 + 2(-\ 5m/s^2)x_1; \qquad x_1 = 90m$

La partícula se movió hacia la derecha $90m$. Ahora se regresa desde el reposo. Su velocidad final es - $20m/s$.

El tramo 2 representa el movimiento de la partícula cuando se desplaza hacia la izquierda desde una velocidad igual a cero hasta que adquiere una velocidad de - $20\ m/s$, en este tramo la partícula tiene un desplazamiento x_2.

tramo 2: $v_f^2 = v_0^2 + 2ax_2; \qquad (-\ 20\ m/s)^2 = 0 + 2(-\ 5\ m/s^2)x_2; \qquad x_2 = -\ 40m$

El signo negativo del desplazamiento x_2 se debe a que la partícula se mueve hacia la izquierda.

Para calcular la distancia total recorrida por la partícula debemos sumar los dos desplazamientos sin considerar el signo de x_2.

$$distancia\ recorrida:\ d = 90\ m + 40\ m = 130\ m$$

Si ahora deseamos calcular el desplazamiento de la partícula, debemos sumar x_1

y x_2 respetando el signo.

$$desplazamiento:\ \overrightarrow{\Delta x} = 90\ m - \ 40\ m = 50\ m$$

Como la partícula regresó después de haber alcanzado su velocidad cero, se encuentra a $+50\ m$ del origen.

Suponga que ahora se le pide que calcule el valor del tiempo para cuando la partícula se detiene.

Los datos serían: $v_0 = +\ 30\ m/s; \quad v_f = 0; \quad a = -\ 5\ m/s^2; \quad v_f = v_0 + at$

reemplazando datos: $0 = 30\ m/s + (-\ 5\ m/s^2)\ t$ despejando el tiempo: $t = 6s$

Lo cual es correcto si comparamos con el resultado encontrado en el ejemplo 3.24 por el método gráfico. Como podrá ver el estudiante, los problemas de cinemática en una dimensión pueden resolverse por el método analítico así como por el método gráfico; solo que en unos casos resulta más sencillo usar el método gráfico y en otros, el método analítico.

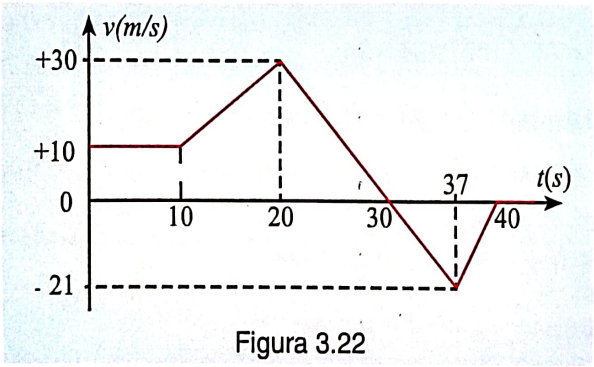


Figura 3.22

Ejemplo 3.28 - El gráfico v *vs.* t de la figura 3.22 representa el movimiento de una partícula en línea recta.

Analice el gráfico y calcule las aceleraciones, el desplazamiento y la distancia recorrida en cada uno de los tramos.

Solución: Este gráfico representa el movimiento de una partícula que se mueve en línea recta.

Se observa que para $t = 0$ la partícula se mueve con velocidad constante igual a $+10\ m/s$ y lo hace durante $10s$. Luego, la partícula empieza a aumentar su velocidad y se sigue alejando del origen. Entre $10s$ y $20s$, la partícula incrementa su velocidad uniformemente y la pendiente de la recta que es constante representa la aceleración. En este caso la pendiente se calcula de la siguiente forma:

$$a = \frac{30m/s - \ 10m/s}{20s - \ 10s} \qquad a = 2.0\ m/s^2$$

La partícula mantiene esta aceleración constante hasta que el tiempo llega a $20s$. Después, a partir de los veinte segundos empieza a disminuir su velocidad de forma uniforme hasta que a los 30 segundos su velocidad se hace cero. Inmediatamente después su velocidad se hace negativa y esto implica que la partícula cambió la

dirección de su movimiento, por lo tanto empieza a moverse hacia el origen (en dirección opuesta). Se observa que a los $37s$, cuando ha alcanzado una velocidad de - $21m/s$, la partícula empieza a disminuir su rapidez hasta que a los 40 segundos se detiene ya que su velocidad es cero. Después de los 40 segundos se observa que la línea es horizontal lo que quiere decir que la partícula se quedó en reposo.

CÁLCULO DE LA ACELERACIONES

De 0 a 10 segundos, como la partícula se mueve con velocidad constante, su aceleración es igual a cero.

De 10 a $20s$ es similar a lo que ya se hizo anteriormente, es decir se calcula su pendiente, y esto es:

$$\vec{a} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \qquad \vec{a} = \frac{30\ m/s - 10\ m/s}{20s - 10s} \qquad \vec{a} = 2.0\ m/s^2$$

De $20s$ a $37s$ la aceleración es negativa. Igualmente se calcula el valor de la pendiente, y su valor es:

$$\vec{a} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \qquad \vec{a} = \frac{-\ 21\ m/s - 30\ m/s}{37s - 20s} \qquad \vec{a} = -\ 3.0\ m/s^2$$

De los $37s$ a los $40s$ su aceleración es positiva, pero va disminuyendo paulatinamente hasta llegar a cero. Su valor es:

$$\vec{a} = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0} \qquad \vec{a} = \frac{0 - (-\ 21\ m/s)}{40s - 37s} \qquad \vec{a} = 7.0\ m/s^2$$

De los $40s$ en adelante, la gráfica muestra una línea horizontal lo que indica que su velocidad es constante; pero en este caso la velocidad constante es igual a cero, es decir la partícula permanece en reposo.

CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO Y DISTANCIA RECORRIDA

La gráfica velocidad *vs.* tiempo también nos permite calcular el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula. En el caso del gráfico de la figura 3.22 se puede calcular el desplazamiento si medimos el área bajo la curva.

De 0 a $10s$, el área es igual a $\mathbf{100\ m}$. Esta cantidad indica que la partícula se ha movido $100m$ durante los 10 primeros segundos.

De $10s$ a $20s$, el área es igual a: $10 \times 10m + \frac{1}{2}(10)(20)m = \mathbf{200\ m}$. Esto representa lo que la partícula se ha movido durante el intervalo de 10 a $20s$.

De los $20s$ a los $30s$ el área es igual a: $\frac{1}{2}(10)(30)m = \mathbf{150\ m}$. En este intervalo de tiempo la partícula se ha movido $150m$.

Todos los movimientos de la partícula desde $0s$ hasta $30s$ han sido hacia la derecha (dirección positiva del eje de las x). Se debe notar que a partir de este momento, la velocidad de la partícula se hace negativa; es decir, que a partir de los $30s$ la partícula se estará moviendo hacia la izquierda. Estos desplazamientos por lo tanto serán negativos.

De los $30s$ a los $40s$, el área es igual a: $\frac{1}{2}(10)(-\ 21)m = -\ 105\ m$. Este desplazamiento negativo significa que la partícula se ha desplazado hacia la izquierda.

Por lo tanto el desplazamiento total será: $\Delta x = (100 + 200 + 150 - 105)m$; $\Delta x = 345m$. La distancia recorrida será: $d = (100 + 200 + 150 + 105)m$ $d = 555\ m$

Se deja al estudiante para que calcule el desplazamiento y la distancia recorrida durante el intervalo de $10s$ a $37s$.

3.10 GRÁFICO ACELERACIÓN VS. TIEMPO

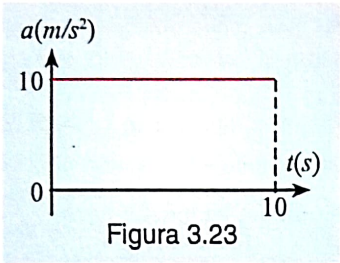


Figura 3.23

Este tipo de gráfico muestra la aceleración de una partícula que se mueve en línea recta con relación al tiempo. El área bajo la curva del gráfico *a vs. t* representa el cambio de velocidad en ese periodo de tiempo.

Igual que antes, las áreas que están arriba del eje del tiempo se consideran positivas, mientras que las áreas que se encuentran debajo del eje del tiempo se consideran negativas.

El gráfico de la figura 3.23 representa el movimiento de una partícula que se mueve en línea recta. Calcule el cambio de velocidad que sufre la partícula entre 0 y 10*s*.

En este gráfico *a vs.t* el área bajo la curva (en este caso es una recta horizontal) es igual a: $10\ m/s^2 \times 10s = 100\ m/s$. Esta cantidad de $100\ m/s$ es la diferencia entre la velocidad cuando la partícula está en $t = 10s$ y $t = 0s$.

Ejemplo 3.29 - Con referencia a la figura 3.23, si la velocidad para $t = 0s$ es igual a $20\ m/s$, entonces ¿cuál será la velocidad de la partícula para $t = 10s$?

Solución: $\text{área bajo la curva} = 100m/s = v_{10} - v_0 \rightarrow v_{10} = v_0 + 100m/s$

$v_{10} = 20m/s + 100m/s \rightarrow v_{10} = 120m/s$

También se puede hallar la velocidad cuando $t = 8s$. Supongamos que la velocidad a $t = 0s$ sigue siendo de 20 m/s. En este caso, el área bajo la curva sería: $10m/s^2 \times 8s = 80m/s$, esta cantidad es la diferencia de velocidad entre $t = 8s$ y $t = 0s$.

Así: $80m/s = v_8 - v_0 \rightarrow v_8 = 80m/s + 20\ m/s \rightarrow v_8 = 100m/s$

Cuando una partícula se mueve en línea recta y con aceleración constante, en la gráfica *v vs. t* se representa por medio de una línea recta y, como la pendiente de una línea recta es constante, implica que la aceleración será constante. Por lo tanto, siempre que la velocidad de una partícula varíe uniformemente y por tanto en la gráfica *v vs. t* el gráfico esté representado por una línea recta, en la gráfica *a vs. t* debe ser una línea horizontal. Debe recordarse que el área bajo la curva de este último gráfico representa el cambio de velocidad en un intervalo de tiempo y no simplemente representa la velocidad.

Ejemplo 3.30 - Realice el gráfico velocidad *vs.* tiempo y aceleración *vs.* tiempo de un objeto que es lanzado desde la superficie de la Tierra y que regresa al punto donde fue lanzado.

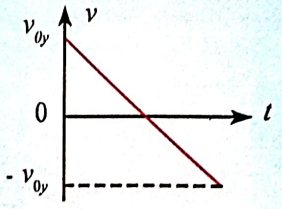


Figura 3.24

Solución: El objeto sale con velocidad inicial hacia arriba (v_{0y}), por lo tanto su velocidad es positiva y cuando regresa al suelo su velocidad tiene la misma magnitud con la que salió pero su signo es negativo ($-v_{0y}$).

Tal como puede apreciarse en la figura 3.24

Debido a que la aceleración de la gravedad es aproximadamente constante sobre la superficie de la Tierra, la gráfica *a vs. t* debe ser una línea horizontal. Por convención de signos la aceleración es negativa debido a que se dirige hacia abajo. Ver figura 3.25

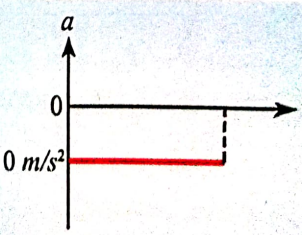


Figura 3.25

Ejemplo 3.31 - Dado el gráfico velocidad *vs.* tiempo, de la figura 3.26, realice el diagrama *aceleración vs. tiempo*.

Solución

Ahora, para cada tramo de la curva *velocidad vs. tiempo*, se analizará la forma de la gráfica para representar la aceleración.

Se puede observar que para todos los tramos de la gráfica velocidad *vs.* tiempo, tenemos líneas rectas, lo que implica que la aceleración para cada tramo es constante.

Se debe recordar que la pendiente de la curva velocidad *vs.* tiempo representa la aceleración.

Analice la curva v *vs.* t, tramo a tramo.

En el siguiente ejemplo (3.32), se nos proporciona el movimiento de una partícula que se mueve en línea recta en el gráfico v *vs.* t y a partir de este, se debe graficar el mismo movimiento en un diagrama x *vs.* t. Se debe observar que las líneas rectas en el gráfico v *vs.*t se convierten en curvas en el diagrama x *vs.*t, además que la pendiente de la curva en el gráfico v *vs.*t representa la aceleración de la partícula.

Siempre se debe tener en mente que la partícula se mueve en una sola dimensión, es decir que la partícula se mueve siempre en línea recta, ya sea alejándose del origen o acercándose a él.

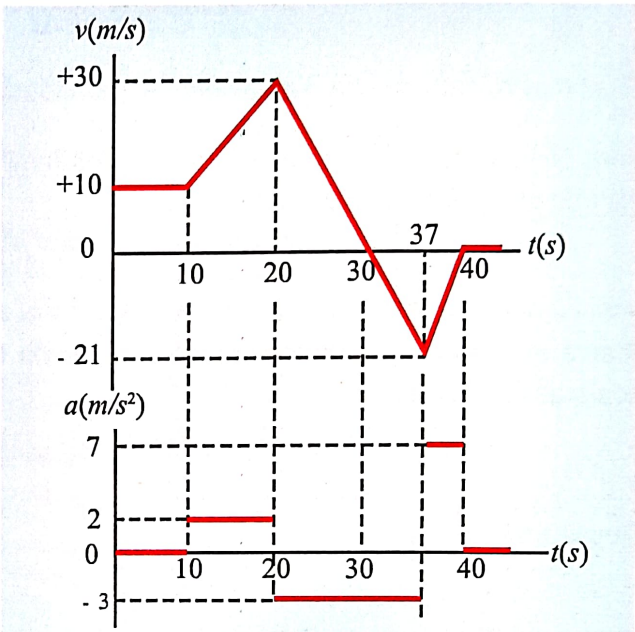


Figura 3.26

En la figura 3.27 se muestran dos gráficos, el primero es un gráfico velocidad *vs.* tiempo, y para obtener un gráfico posición *vs.* tiempo, se debe tener presente que la pendiente de la gráfica x *vs.* t es la velocidad de la partícula.

Por lo tanto, en aquellos tramos en el que la velocidad de la partícula es constante, en el gráfico x *vs.* t será una línea recta e inclinada.

Ejemplo 3.32 - Dada la siguiente figura v *vs.* t, construya el diagrama x *vs.* t.

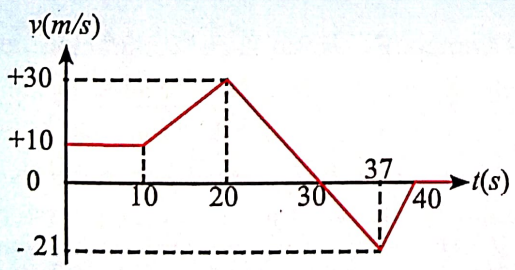


Figura 3.27 a

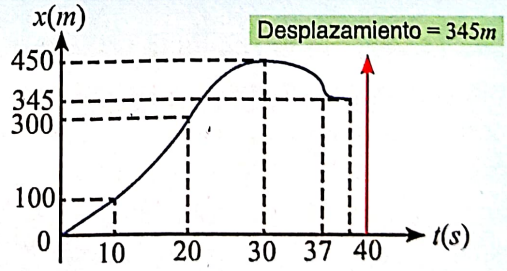


Figura 3.27 b

Se deja para el estudiante que compruebe que la distancia total recorrida por la partícula es de $555m$ y que el desplazamiento es $345m$. Use solamente el gráfico para realizar esta comprobación.

3.11 MOVIMIENTO RECTILINEO CON ACELERACIÓN VARIABLE USANDO DERIVADAS E INTEGRALES

Por definición la aceleración media es igual al cambio de la velocidad dividida para el tiempo:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \qquad \vec{a} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

Debido a que el movimiento es en una dimensión, la definición de aceleración y de velocidad se puede escribir en forma escalar de la siguiente manera:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad a = \frac{v_f - v_0}{t}$$

En el movimiento en una dimensión, las velocidades y la aceleración pueden ser positivas o negativas.

Para conocer la aceleración en función del tiempo en un instante definido se aplica el concepto de límite cuando el tiempo es muy pequeño.

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A esta expresión se la conoce como la derivada de la velocidad (v) con respecto al tiempo, y representa la aceleración instantánea.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad (3.18)$$

Despejando dv queda:

$$dv = adt$$

Para obtener la velocidad como función del tiempo se debe integrar, es decir sumar todos los dt (llamado diferencial del tiempo) y así obtener la velocidad.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t adt \qquad (3.19)$$

$$v - v_0 = \int_0^t adt$$

Despejando v

$$v = v_0 + \int_0^t adt \qquad (3.20)$$

Esta última expresión representa la velocidad en función del tiempo. Es válida para aceleración constante como para aceleración variable, v representa la velocidad para el tiempo t, y v_0 la velocidad inicial para el tiempo cero. Con el fin de hacer notorio que esta aceleración puede ser variable escribiremos la ecuación anterior de la siguiente manera.

$$v = v_0 + \int_0^t a(t)dt \qquad (3.21)$$

Esta última expresión indica que la aceleración no tiene que ser constante sino que puede ser variable debido a que se ha escrito a la aceleración como $a(t)$ que significa que depende del tiempo. A continuación, se resolverán los casos de aceleración constante y se escribirán las ecuaciones correspondientes.

3.11.1 CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN CON ACELERACIÓN CONSTANTE

Partiendo de la expresión:

$$v = v_0 + \int_0^t a(t)dt$$

donde la aceleración es constante, quedaría:

$$v = v_0 + \int_0^t a\,dt$$

al ser la **aceleración constante** puede salir del símbolo de integral quedando:

$$v = v_0 + a\int_0^t dt$$

integrando $\int_0^t dt$ queda t y reemplazando:

$$v = v_0 + at$$ **esta es la ecuación de la velocidad para el *m.r.u.v***

Para calcular el desplazamiento usamos el concepto de que la velocidad es la derivada de la posición (x) con respecto al tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad (3.22)$$

Despejando dx se puede escribir:

$$dx = v\,dt$$

Y como la velocidad es función del tiempo:

$$dx = v(t)dt$$

Integrando:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v\,dt$$

Observamos que: $\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0$

$$\int_0^t v(t)dt = \int_0^t (v_0 + at)dt$$

$$\int_0^t (v_0 + at)dt = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Y reemplazando: $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$ **esta es la ecuación de la posición para el *m.r.u.v***

Hasta este momento se ha expresado la velocidad en términos del tiempo. Usando el método matemático denominado regla de la cadena,se obtendrá una relación entre la velocidad y el desplazamiento.

3.11.2 REGLA DE LA CADENA APLICADA A LA CINEMÁTICA

Según la ecuación (3.18) la aceleración venía expresada como:

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Multiplicando por dx/dx la expresión anterior queda:

$$a = \frac{dv}{dx}\,\frac{dx}{dt}$$

Donde se observa que el término dx/dt representa la velocidad v.

$$a = v\,\frac{dv}{dx} \qquad (3.23)$$

$$a\,dx = v\,dv$$

Integrando:

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{0}^{t} v\,dt$$

Para el caso de **aceleración constante**, la aceleración sale del signo de integral.

$$\int_{x_0}^{x} a\,dx = \int_{0}^{t} v\,dv \quad \rightarrow \quad a\int_{x_0}^{x} dx = \int_{0}^{t} v\,dv$$

Integrando ambas expresiones se tiene:

$$a\,(x - x_0) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^{\,2}}{2}$$

Reordenando:

$$v^2 = v_0^{\,2} + 2a\,(x - x_0)$$ **Ecuación de la velocidad en función de la posición en el** ***m.r.u.v***

Ejemplo 3.37 - Un auto arranca, desde el punto A, con una velocidad de 18 km/h. Después de 10 segundos su velocidad es de 72 km/h. Calcular el valor de la aceleración del auto si su movimiento es rectilíneo uniformemente variado.

Solución

Primero vamos a convertir las velocidades de km/h a m/s

$$v_0 = \frac{18\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{\cancel{h}}{3600s} \times \frac{1000\ m}{1\cancel{km}} = 5.0\ m/s \qquad v = \frac{72\cancel{km}}{\cancel{h}} \times \frac{\cancel{h}}{3600s} \times \frac{1000\ m}{1\cancel{km}} = 20\ m/s$$

Se observa que el auto tiene una velocidad inicial $v_0 = 5.0\ m/s$ y luego que han transcurrido 10 s su velocidad aumenta hasta 20 m/s.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$dv = a\,dt$$

$$\int_{5.0}^{20} dv = \int_{0}^{10} dt$$

$$20 - 5.0 = a\,(10 - 0)$$

$$a = 1.5\ m/s$$

Ejemplo 3.38 - La posición de una partícula varía con el tiempo de la forma:

$$x = 2t^3 + t^2 - 3t + 5$$

Donde x está en metros y t en segundos.

a) Calcule velocidad de la partícula para $t = 2.0\ s$

Solución:

La velocidad es igual a la derivada de la posición con respecto al tiempo.

$$v = \frac{d}{dt}(2t^3 + t^2 - 3t + 5)$$

Esta expresión representa la velocidad en función del tiempo.

$$v = 6t^2 + 2t - 3$$

Una vez que se deriva la posición se obtiene la velocidad como función del tiempo.

Si reemplazamos el tiempo de $2.0\ s$ hallaremos la velocidad requerida.

$$v = 6\,(2.0)^2 + 2\,(2.0) - 3$$

$$v = 25\ m/s$$

b) Calcule el tiempo para el cual la partícula se detiene.

Solución:

La partícula se detiene cuando su velocidad es cero. $v = 6t^2 + 2t - 3$

$$6t^2 + 2t - 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene el tiempo requerido.

$$t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\,(6)\,(-3)}}{2 \times 6} \quad \rightarrow \quad t = 0.56\ s$$

c) Calcule la aceleración para el tiempo en que la partícula se detiene.

Solución:

El primer paso es obtener la aceleración de la partícula derivando la velocidad con respecto al tiempo. El segundo paso es reemplazar el valor del tiempo en la expresión de la aceleración.

$$v = 6t^2 + 2t - 3 = 0$$

El tiempo para el cual la partícula se detiene es $t = 0.56\ s$

$$a = \frac{d}{dt}(6t^2 + 2t - 3) \quad \rightarrow \quad a = 12t + 2$$

$$a = 12(0.56) + 2 \quad \rightarrow \quad a = 8.7\ m/s^2$$

d) ¿Existe algún valor del tiempo en que la aceleración de la partícula sea cero?

Solución:

La aceleración en función del tiempo está dada por la expresión:

$a = 12t + 2$

Si la expresión de la aceleración se iguala a cero el tiempo saldría negativo lo cual significa que en ningún lugar o tiempo la partícula adquiere una aceleración igual a cero.

Ejemplo 3.39 - El movimiento, en línea recta, de una partícula se describe como:

$$x = 2t^3 + 4t^2 - 2t - 5$$

donde x (posición) está en metros y t en *segundos*.

Calcular:

a) La velocidad de la partícula a los 2.0 s.

b) La aceleración de la partícula a $t = 2.0\ s$.

c) El valor del tiempo al cual la partícula se detiene.

Solución:

a) La velocidad es igual a la derivada de la posición con respecto al tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad v = \frac{d}{dt}(2t^3 + 4t^2 - 2t - 5) \qquad v(t) = 6t^2 + 8t - 2$$

A los 2.0 s la velocidad es: $v = 6(2.0)^2 + 8(2.0) - 2$

$$v = 38\ m/s$$

b) La aceleración es igual a la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad a = \frac{d}{dt}(6t^2 + 8t - 2) \qquad a(t) = 12t + 8$$

A los 2.0 s la aceleración es: $a = 12(2.0) + 8$

$$a = 32\ m/s^2$$

c) La partícula se detiene cuando $v = 0\ m/s$

$$v(t) = 6t^2 + 8t - 2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$t = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(6)(-2)}}{2 \times 6} \qquad t = \frac{-8 \pm 10.6}{12} \qquad t = 0.22s$$

Al tiempo $t = 0.22s$ la partícula se detiene y continúa moviéndose en dirección contraria (hacia la derecha)

Ejemplo 3.40 - La aceleración en función de la posición está dada por:

$$a = 3x^2 - 2x$$

a) Calcular la velocidad en función de la posición. Suponga que para $t = 0$ la posición es $x = x_0 = 0\ m$ y $v = v_0$.

b) ¿Cuál es el valor de la velocidad de la partícula cuando la posición es igual a cero?

c) ¿Cuál es el valor de la posición para que la partícula tenga, otra vez, velocidad igual v_0?

Solución:

a) Calcular la velocidad en función de la posición. Suponga que para $t = 0$ la posición es $x = x_0 = 0\ m$ y $v = v_0$.

La aceleración está dada por $a = dv/dt$ donde se observa que esta varía con el tiempo. En el ejemplo, observamos que la aceleración está en función de la posición, por lo tanto se aplica la ecuación 3.23 $\left(a = v\dfrac{dv}{dx}\right)$.

$$a = v\frac{dv}{dx} \qquad\qquad vdv = adx$$

Al reemplazar la aceleración y colocar los límites estamos listos para la integración.

$$\int_{v_0}^{v} vdv = \int_0^x (3x^2 - 2x)dx$$

Aplicando las reglas de la integración:

$$\frac{v^2}{2}\Big|_{v_0}^{v} = x^3\Big|_0^x - x^2\Big|_0^x \qquad \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = x^3 - x^2 \qquad v^2 = v_0^2 + 2x^3 - 2x^2 \qquad v^2 = \sqrt{v_0^2 + 2x^3 - 2x^2}$$

Esta última ecuación está en unidades del Sistema Internacional de Unidades.

b) ¿Cuál es el valor de la velocidad de la partícula cuando la posición es igual a cero?

Reemplazando en la ecuación de la velocidad el valor $x = 0$ se observa que la velocidad v es igual a v_0.

c) ¿Cuál es el valor de la posición para que la partícula tenga, otra vez, velocidad igual v_0?

En la ecuación de la velocidad haciendo $v = v_0$ se obtiene:

$$v^2 = \sqrt{v_0^2 + 2x^3 - 2x^2} = 0 \qquad\qquad v_0 = \sqrt{v_0^2 + 2x^3 - 2x^2}:$$

Elevando ambos términos al cuadrado:

$$v_0^2 = v_0^2 + 2x^3 - 2x^2$$

Eliminando v_0^2 y sacando factor común x se tiene:

$$2x^2(x - 1) = 0$$

De este resultado se obtiene que las soluciones son tres valores:

$x = 0\ m$ solución trivial

$x = +1\ m$ solución

Los valores de la posición para los cuales se cumple la condición de que $v = v_0$ son: $x = 0\ m$, $x = 1\ m$

Ejemplo 3.41 - Una partícula se mueve en línea recta de acuerdo a:

$$v = 2t^3 + 3t^2 + 2t + 2$$

Donde para $x = 4.0\ m$ el tiempo es $1.0\ s$.

Calcule la posición para cuando el tiempo es de $2.0\ s$.

Solución:

La velocidad es la derivada de la posición en función del tiempo.

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad dx = vdt$$

Esta última expresión nos dice que para obtener x en función del tiempo se tiene que integrar.

$$\int dx = \int v dt$$

Reemplazando la expresión de la velocidad en la ecuación anterior se tiene:

$$\int_4^x dx = \int_1^2 (2t^3 + 3t^2 + 2t + 2)$$

De acuerdo a los datos del problema: para el tiempo de $1.0\ s$ se encuentra en $x = 4.0\ m$. Estos son los datos que nos da el problema. Observe que estos datos están en la parte inferior de las integrales. La pregunta es calcular el valor de la posición x cuando el tiempo es de $2.0s$. Estos datos se escriben en la parte superior de los símbolos de las integrales.

$$\int_4^x dx = 2\int_1^2 t^3\,dt + 3\int_1^2 t^2\,dt + 2\int_1^2 t\,dt + 2\int_1^2 dt \qquad x\Big|_4^x = 2\frac{t^4}{4}\Big|_1^2 + 3\frac{t^3}{3}\Big|_1^2 + 2\frac{t^2}{2}\Big|_1^2 + 2t\Big|_1^2$$

$$x - 4 = (8 - 0.5) + (8 - 1) + (4 - 1) + (4 - 2)$$

Despejando x se obtiene: $x = 23.5\ m$

Esto significa que a los $2.0\ s$ la partícula se halla en la posición $x = 23.5\ m$.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Desplazamiento, rapidez media y velocidad media

Actividad 3.1

De las siguientes proposiciones indique la alternativa que es correcta y justifique.

a) El vector posición no depende de la ubicación del origen del sistema de referencia.

b) El desplazamiento no depende de la ubicación del origen del sistema de referencia.

c) El desplazamiento es una cantidad escalar.

d) El desplazamiento es igual a la distancia recorrida por un objeto.

e) El desplazamiento tiene la misma dirección que el vector posición.

Actividad 3.2

Un corredor se presenta en una carrera por regiones en la que existen muchas subidas y bajadas, las mismas que forman triángulos equiláteros (lados iguales) tal como se muestra en la figura 3.28. En cuesta arriba lleva una rapidez constante de $3.0\ m/s$, mientras que en cuesta abajo su rapidez es de $6.0\ m/s$; Calcular la rapidez media durante todo el recorrido.

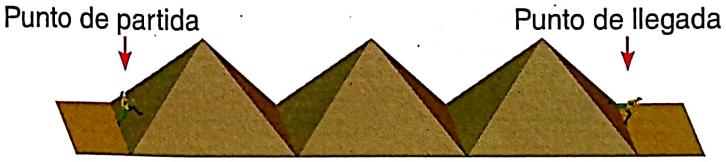


Figura 3.28

Actividad 3.23

Un insecto recorre la trayectoria AB, cuya longitud es de $25.0\ m$ con rapidez constante de $0.50\ m/s$ como se muestra en la figura. Entonces, calcular la magnitud de la velocidad media del insecto.

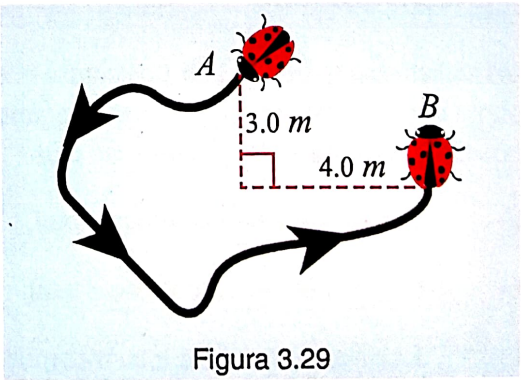


Figura 3.29

Actividad 3.4

En un viaje por carretera de Guayaquil a Quito el velocímetro de un automóvil registra una rapidez constante de 50 km/h durante todo el trayecto. La velocidad media del automovil es representada por: $\vec{v}_m$.

a) $|\vec{v}_m| = 50\ km/h$ b) $|\vec{v}_m| > 50\ km/h$ c) $|\vec{v}_m| < 50\ km/h$

d) $\vec{v}_m = 50\ km/h$ e) $\vec{v}_m < 50\ km/h$

Actividad 3.5

Un corredor se presenta en una carrera por regiones en la que existen muchas subidas y bajadas, las mismas que forman triángulos equiláteros (lados iguales) tal como se muestra en la figura 3.30. En cuesta arriba lleva una rapidez constante de 3.0 m/s, mientras que en cuesta abajo su rapidez es de 6.0 m/s; Calcular la magnitud de la velocidad media durante todo su recorrido.

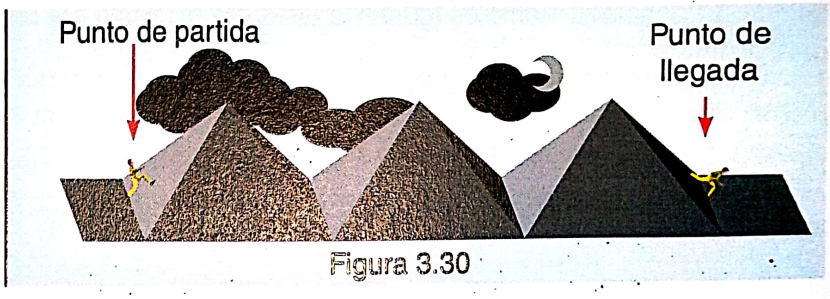


Figura 3.30

Actividad 3.6

Un objeto se mueve hacia la derecha con rapidez constante y recorre una distancia de 10.0 m en 5.0 s, luego continua su viaje con rapidez constante igual a 5.0 m/s y recorre una distancia de 80.0 m. Calcular la magnitud de la velocidad media durante todo el recorrido.

Actividad 3.7

Un ciclista parte desde una posición $x = +30\ km$, una hora después llega a la posición $x = +200\ km$, en ese punto decide retornar y se da vuelta llegando a la posición $x = +80\ km$ a las 3.0 horas después de haber partido desde el inicio de su trayectoria. Se pide:

a) Calcular el desplazamiento total.

b) Calcular la velocidad media total.

c) Calcular la distancia total recorrida.

d) Calcular la rapidez media total.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

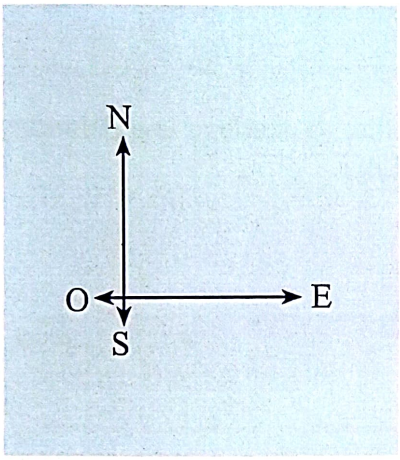
Actividad 3.8

Un corredor cubre la primera mitad de la distancia de una pista recta con una rapidez de 5.0 m/s y durante su segunda mitad, su rapidez es de 10.0 m/s. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad media del corredor durante todo su recorrido?

Nota: Suponga que la trayectoria es en linea recta.

Actividad 3.9

Un corredor corre en línea recta 25.0 km; 15° al norte del este en 30 minutos, luego 20.0 km al noroeste en 45 minutos y finalmente 10.0 km al oeste en 45 minutos, se pide determinar:



a) El desplazamiento total.

b) La velocidad media.

c) La distancia total recorrida.

d) La rapidez media de todo el recorrido.

Actividad 3.10

Una partícula recorre una distancia de 0.20 km con rapidez constante de 10 m/s. Luego continua su movimiento durante 0.40 km con rapidez constante durante 5.0 s. Calcular la velocidad media para todo el recorrido, si este movimiento se realiza en línea recta.

Actividad 3.11

Una partícula recorre una distancia x con una rapidez constante de 5.0 m/s. Luego, continua su movimiento y se mueve una distancia x con una rapidez constante de 25 m/s. Calcular la velocidad media de la partícula para todo el recorrido.

Actividad 3.12

En una rutina diaria de entrenamiento, dos deportistas se acercan poco a poco en una pista recta cuya distancia es de 200 m, el deportista A lleva una velocidad constante de +10.0 m/s y el deportista B tiene una velocidad constante de - 8.0 m/s. Considerando que el deportista A se encuentra inicialmente en el origen de coordenadas y el deportista B a +200 m, se pide:

a) Calcular en qué tiempo se encuentran los deportistas.

b) Calcular la posición de encuentro de los deportistas.

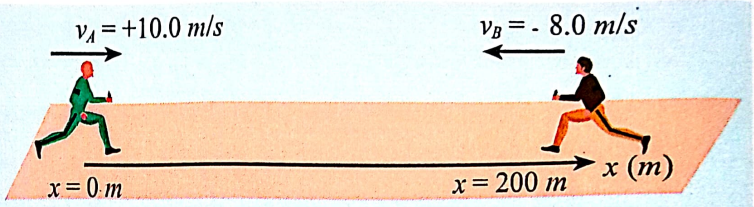


Figura 3.31

Actividad 3.13

Dos deportistas A y B pasan simultáneamente por los puntos Q y P, respectivamente, separados a una distancia de 400 m a velocidades constantes de 4.0 m/s y - 5.0 m/s, respectivamente. Se pide:

Nota: considerar el sistema de referencia en el punto Q y se encuentra a la izquierda del punto P.

a) Escriba las ecuaciones de la posición en función del tiempo para cada deportista de la forma $x = x_0 \pm vt$

b) Determinar el tiempo y posición de los deportistas cuando se cruzan.

c) Construya un gráfico posición versus tiempo, donde se observe la posición de los 2 deportistas.

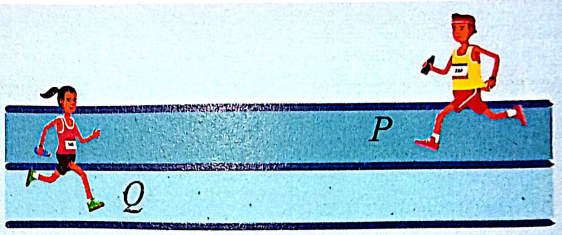
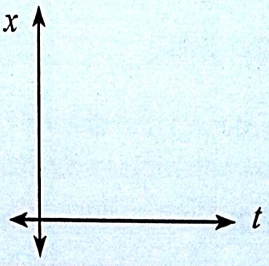


Figura 3.32



Actividad 3.14

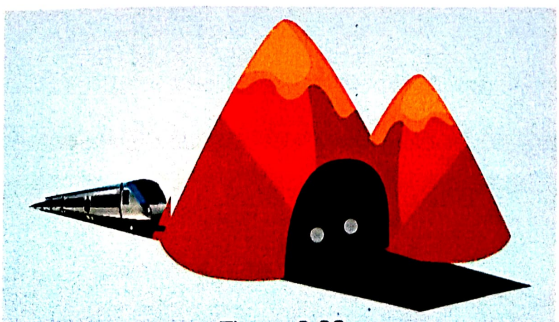


Figura 3.33

Un tren de 250 m de largo que se mueve con rapidez constante de 50 km/h se acerca a un túnel.

Desde el instante en que ingresa al túnel, hasta que el último vagón de la locomotora ha salido de él, han transcurrido 5 $minutos$. Calcule la longitud del túnel.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.15

Dos deportistas A y B pasan del mismo punto Q, en dirección del eje x positivo. El deportista A pasa primero con una velocidad de $4.0\ m/s$ y después de $10\ s$ pasa el segundo deportista B a una velocidad de $6.0\ m/s$.

Se pide:

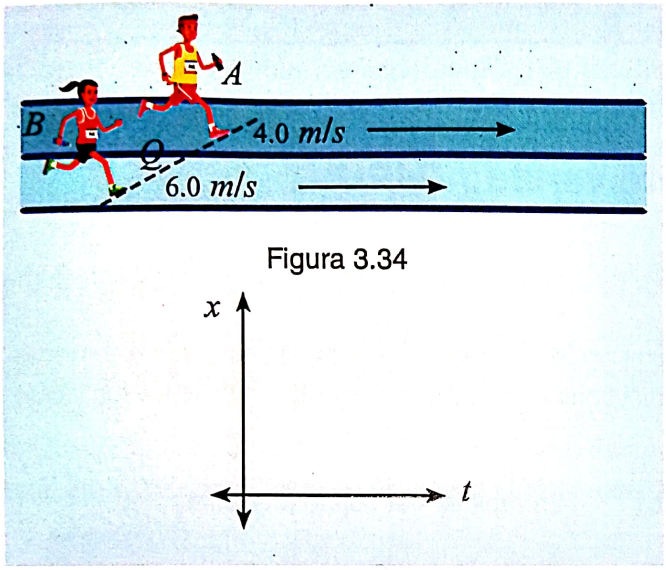


Figura 3.34

Nota: considerar el sistema de referencia en el punto Q.

a) Determinar el tiempo y posición donde el deportista B alcanza al A.

b) Construya un gráfico posición versus tiempo, donde se observe la posición de los 2 deportistas.

Aceleración media

Actividad 3.16

Un objeto gira con rapidez constante, en sentido horario, a lo largo de una circunferencia desde el punto A hasta el punto B como se muestra en la figura. El tiempo empleado por el objeto es de $10\ s$ y su rapidez es de $15\ m/s$. Calcular el vector aceleración media y su magnitud entre los puntos A y B.

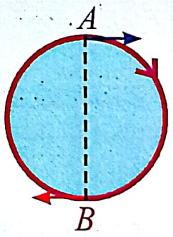


Figura 3.35

Actividad 3.17

En una competencia de patinaje artístico, una niña da vueltas circulares alrededor de un centro con rapidez constante. ¿Se puede afirmar que la niña se mueve con aceleración igual a cero?

Explique su respuesta.

Figura 3.36

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.15

Dos deportistas A y B pasan del mismo punto Q, en dirección del eje x positivo. El deportista A pasa primero con una velocidad de $4.0\ m/s$ y después de $10\ s$ pasa el segundo deportista B a una velocidad de $6.0\ m/s$.

Se pide:

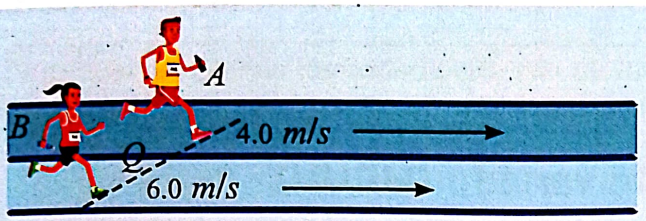
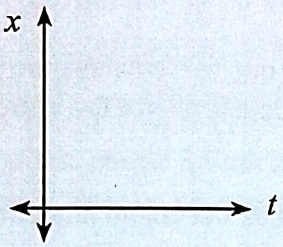


Figura 3.34



Nota: considerar el sistema de referencia en el punto Q.

a) Determinar el tiempo y posición donde el deportista B alcanza al A.

b) Construya un gráfico posición versus tiempo, donde se observe la posición de los 2 deportistas.

Aceleración media

Actividad 3.16

Un objeto gira con rapidez constante, en sentido horario, a lo largo de una circunferencia desde el punto A hasta el punto B como se muestra en la figura. El tiempo empleado por el objeto es de $10\ s$ y su rapidez es de $15\ m/s$. Calcular el vector aceleración media y su magnitud entre los puntos A y B.

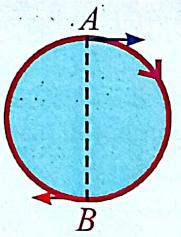


Figura 3.35

Actividad 3.17

En una competencia de patinaje artístico, una niña da vueltas circulares alrededor de un centro con rapidez constante. ¿Se puede afirmar que la niña se mueve con aceleración igual a cero?

Explique su respuesta.

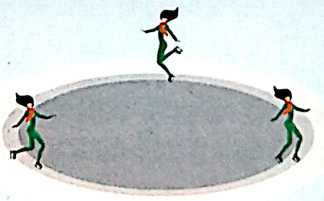


Figura 3.36

Actividad 3.18

Un automóvil tiene aceleración negativa (hacia la izquierda) mientras su movimiento es hacia la derecha. Escoja la alternativa es la correcta y explique su respuesta.

a) La velocidad del automóvil es uniforme.

b) La velocidad del automóvil es negativa.

c) El automóvil incrementa su rapidez.

d) El automóvil se mueve hacia la izquierda.

e) El automóvil disminuye su rapidez.

Movimiento rectilineo uniformemente variado (MRUV)

Actividad 3.19

Un objeto parte con una velocidad inicial de $+10\ m/s$ y tiene una aceleración que va disminuyendo uniformemente (aceleración variable) conforme el objeto se mantiene en movimiento. Escoja la alternativa correcta y justifique su respuesta.

a) La rapidez del objeto disminuye.

b) La rapidez del objeto aumenta.

c) La rapidez del objeto se mantiene constante.

d) El objeto regresa al origen.

Actividad 3.20

¿Es posible que un objeto que parte con una velocidad positiva y con una aceleración constante negativa pueda regresar al punto de partida después de cierto tiempo? Explique.

Actividad 3.21

Un objeto recorre una distancia d_1 cuando se mueve con aceleración constante a_1 durante t_1 segundos. ¿Qué distancia se moverá un segundo objeto cuya aceleración a_2 sea la mitad que a_1 pero que el tiempo t_2 sea cuadruple de t_1? Suponga que ambos objetos parten con velocidad inicial cero.

a) Igual que d_1.

b) El doble que d_1.

c) Cuatro veces de d_1.

d) Seis veces de d_1.

e) Ocho veces de d_1.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.22

Una motocicleta parte del reposo en el punto A y acelera uniformemente hacia la derecha a razón de $2.0\ m/s^2$.

Al mismo tiempo y a $800\ m$ de distancia sale otra motocicleta y se acerca al punto A con velocidad constante de $20\ m/s$.

Calcular el tiempo que transcurre hasta que las dos motocicletas se cruzan.

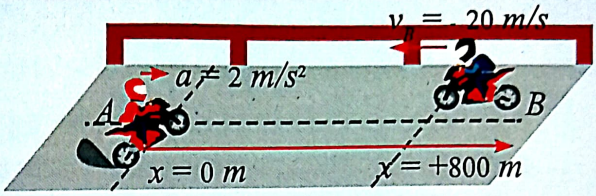


Figura 3.37

Actividad 3.23

Suponga que un carro A que está acelerando alcanza a otro carro B que se está moviendo con velocidad constante. En el momento que el carro A le da alcance al B, ¿cuál de los dos carros tiene mayor velocidad? Suponga que los dos carros parten al mismo tiempo y que el carro A parte del reposo. Además, calcule la relación v_A/v_B en el instante en que el carro A alcanza al B.

Actividad 3.24

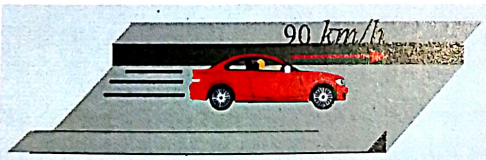


Figura 3.38

Un auto de carreras lleva una velocidad de $90\ km/h$ y sus frenos son capaces de darle una desaceleración constante de $5.0\ m/s^2$. El piloto se toma un tiempo de $3.0\ s$ para frenar y detener totalmente el carro a medida que ve un obstáculo. ¿Cuál es la distancia del obstáculo a la que el piloto debe aplicar los frenos para evitar el choque?

Actividad 3.25

Un conductor de un bus que viaja en línea recta a una velocidad v entra en una zona escolar, en el instante $t_0 = 0$, el conductor observa un disco pare que se encuentra en la mitad entre el bus y la escuela.

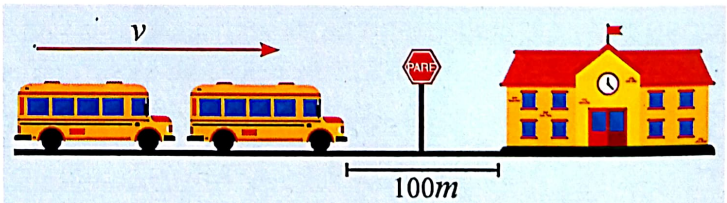
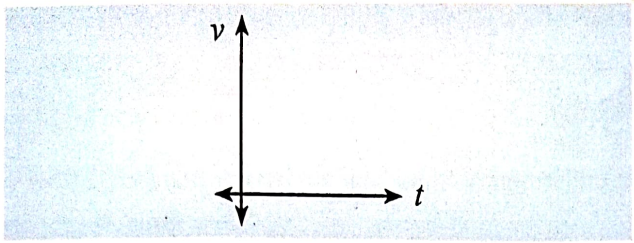


Figura 3.39

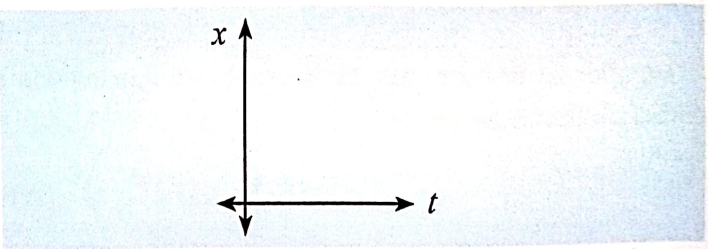
Si la distancia entre el bus y la escuela es $100m$ y el conductor aplica los frenos deteniéndose justo al frente del disco pare en un tiempo de 10 segundos, se pide:

a) Determine la velocidad a la que viajaba el conductor.



b) Realizar un gráfico velocidad versus tiempo desde que el conductor aplica los frenos hasta que se detiene.

c) Colocando el sistema de coordenadas en el punto de aplicación de los frenos, realizar un gráfico posición versus tiempo hasta que el bus se detiene.



Actividad 3.26

En el mismo instante en que un automóvil A arranca con una aceleración de 2.50 m/s^2, otro automóvil B lo rebasa con una velocidad constante de 20.0 m/s. Se pide:

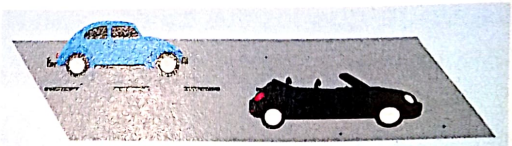
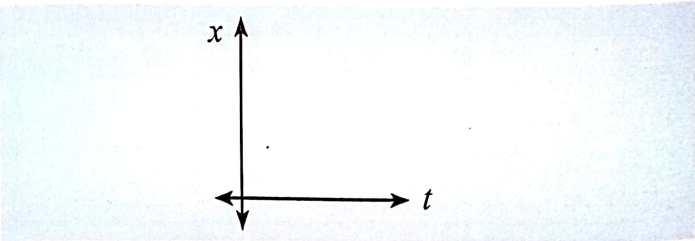


Figura 3.40

a) ¿En cuántos segundos el automóvil A alcanza al automóvil B?

b) ¿Cuál es la velocidad del automóvil A en el instante de alcanzar al automóvil B?

c) Construya un gráfico posición versus tiempo donde se observe la posición de los 2 automoviles.



Caída libre

Actividad 3.27

Desde una altura h se suelta dos esferas de masas diferentes. ¿Cuál de las dos esferas llega primero al suelo? ¿La de mayor masa, la de menor masa, o ambas llegan al mismo tiempo?

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.28

Suponga que se lanza hacia arriba dos objetos de masas m_1 y m_2 , con la misma velocidad inicial. Indique ¿cuál de los dos objetos llega más alto suponiendo que $m_1 > m_2$?

Actividad 3.29

Suponga que usted está viajando en un globo que se está moviendo verticalmente hacia arriba con rapidez constante. Cuando el globo se encuentra a una cierta altura con respecto a la Tierra usted lanza un objeto verticalmente hacia arriba. El tiempo en que el objeto regresa a su mano será:

a) El mismo que si lo hubiera lanzado en el laboratorio.

b) Menor que si lo hubiera lanzado en el laboratorio.

c) Mayor que si lo hubiera lanzado en el laboratorio.

d) Dependiente de la velocidad del globo.

e) Falta información para responder esta pregunta.

Actividad 3.30

Si usted lanza una piedra verticalmente hacia arriba, ¿cuál es el valor de la aceleración de la piedra cuando llega a su altura máxima? (en el punto donde la velocidad se hace cero)

Actividad 3.31

A una pelota inicialmente en reposo le toma un tiempo t caer desde una altura h. Ignorando la resistencia del aire, calcular el tiempo que le toma la pelota en caer una altura de $16\,h$.

Actividad 3.32

Desde lo alto de un edificio se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de $20.0\ m/s$. Se observa que el objeto llega al suelo después de $6.0\ s$ ¿cuál es la distancia total que recorre el objeto?

Actividad 3.33

Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20.0 m/s desde la azotea de un edificio de 200 m de altura, determine:

a) La altura máxima que alcanza el objeto desde el suelo

b) El tiempo que tarda el objeto en volver a pasar por el lugar de lanzamiento

c) El tiempo que le toma al cuerpo recorrer toda su trayectoria hasta llegar al suelo

Actividad 3.34

Un globo se mueve verticalmente hacia arriba con una velocidad constante de 5.0 m/s. Un pasajero que se halla dentro del globo de pronto suelta un objeto el cual tarda 6.0 s en llegar al suelo. Calcular la altura a la que se encontraba el globo en el instante en que el pasajero suelta el objeto.

Actividad 3.35

Desde el primer piso del edificio de admisiones de la ESPOL, un estudiante deja caer una moneda, y mediante un cronómetro se da cuenta que la moneda llega al suelo al cabo de 1.0 segundo. Se pide:

a) Calcular la altura entre el suelo y el primer piso del edificio.

b) La velocidad de impacto de la moneda contra el suelo.

Actividad 3.36

En una competencia de cheerleaders, Ana es una integrante de uno de los equipos y puede saltar una altura de 1.40 m verticalmente hacia arriba. Calcule la velocidad con que Ana partió del suelo.

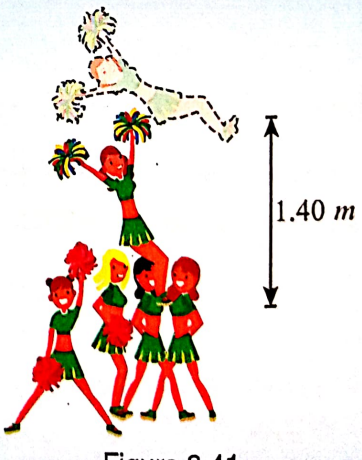


Figura 3.41

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.37

Desde la terraza de un edificio se lanza un objeto, de masa m, directamente hacia arriba con una velocidad inicial v_0. Al mismo tiempo, y desde el mismo lugar, otro objeto de menor masa que el primero se lanza verticalmente hacia abajo con rapidez v_0. Escoja la alternativa correcta y justifique su respuesta.

a) Los dos objetos llegan al mismo tiempo.

b) El objeto de mayor masa llega primero al suelo.

c) Ambos objetos llegan con la misma velocidad al suelo.

d) El objeto de mayor masa llegan con mayor velocidad al suelo.

e) No se puede calcular pues no se conoce la altura del edificio.

Actividad 3.38

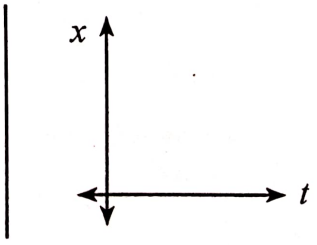
Figura 3.42

En un planeta desconocido se lanza desde el suelo una piedra verticalmente hacia arriba con una rapidez de $10\ m/s$ y tarda en regresar al suelo $4.0\ s$. Se pide:

a) Determinar la aceleración de la gravedad en ese planeta

b) Determinar la velocidad de la piedra a los $3.0\ s$.

c) Realice un gráfico posición versus tiempo hasta los $4.0\ s$.



Actividad 3.39

Desde un globo que sube con velocidad constante de 8.0 m/s se suelta un paquete cuando el globo se halla a 100 m de altura.

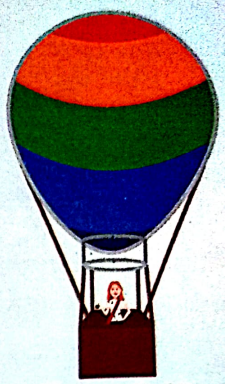


Figura 3.43

a) Calcule la altura máxima que alcanza el paquete medido desde el suelo.

b) Calcule el tiempo que tarda en llegar al suelo.

c) Calcule la rapidez con que impacta el suelo.

Actividad 3.40

Desde un puente que se halla a 20 m sobre un rio se lanza una piedra con una velocidad de 15 m/s dirigida verticalmente hacia arriba. Después de 1.0 s se lanza una segunda piedra, desde el mismo lugar donde lanzó la primera piedra. Si las dos piedras llegan al rio al mismo tiempo, ¿cuál debe ser la velocidad con que se lanzó la segunda piedra?

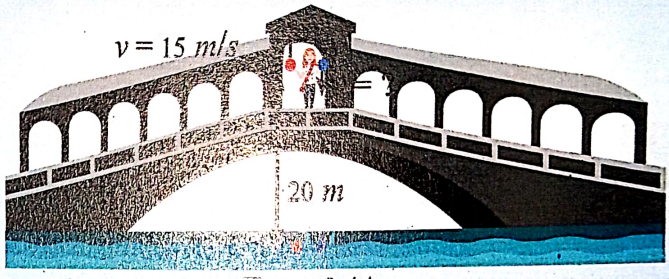


Figura 3.44

Actividad 3.41

Un cohete parte del reposo desde el suelo, se mueve verticalmente hacia arriba con aceleración constante de 2.0 m/s^2 durante 10 s, luego de los cuales se apagan los motores y el cohete se mueve como partícula libre afectada solo por la aceleración de la gravedad. Sin considerar la resistencia del aire:

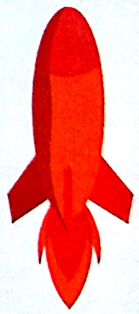


Figura 3.45

a) Calcule la altura máxima que alcanza el cohete, medida del suelo.

b) Calcule el tiempo total en que regresa al suelo.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.42

Un objeto se suelta en el filo de un pozo de profundidad h. El sonido generado por el choque del objeto con el fondo del pozo se lo escucha después de $8.0\ s$ de haberlo soltado. Calcule la profundidad del pozo. Considere que la velocidad del sonido en el aire es de $340\ m/s$.

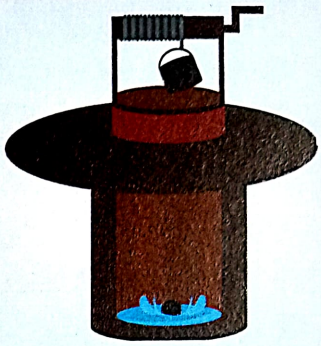


Figura 3.46

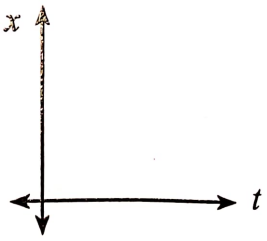
Análisis gráfico

Actividad 3.43

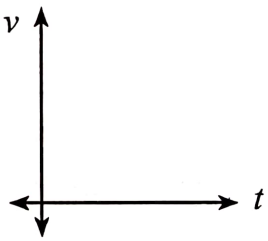
El movimiento de un objeto está descrito por la siguiente ecuación $x=50t - 350$, donde t está en segundos y x en metros.

a) Determine el tiempo transcurrido hasta que el objeto obtenga un desplazamiento de $+500m$.

b) Realizar un gráfico posición versus tiempo



c) Realizar un gráfico velocidad versus tiempo



Actividad 3.44

En la gráfica x *vs.* t de la figura 3.47, se muestra el movimiento de una partícula en línea recta.

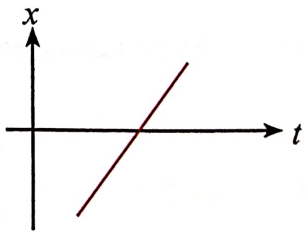
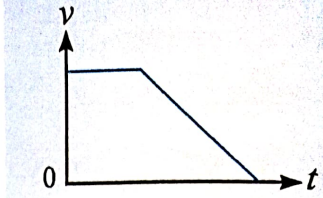


Figura 3.47

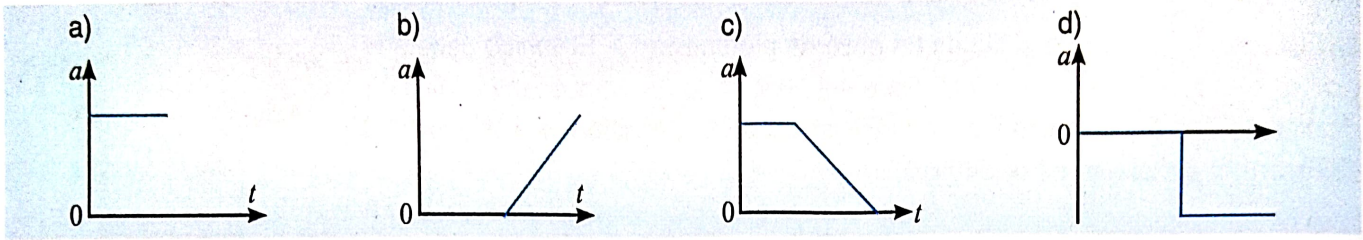
Se observa que la curva (que es una línea recta) cruza el eje del tiempo. Entonces, ¿la partícula, en algún instante, cambia la dirección del movimiento? Explique.

Actividad 3.45

El siguiente diagrama muestra un gráfico velocidad *vs.* tiempo



¿Cuál de los siguientes gráficos a continuación muestra la aceleración con respecto al tiempo del objeto?



Actividad 3.46

En un gráfico *v vs. t* una partícula se mueve en línea recta. Se observa que la curva tiene la forma mostrada en la figura. Indique la alternativa correcta y justifique su respuesta.

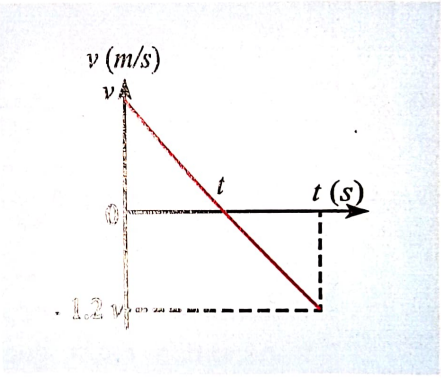
a) La partícula tiene aceleración variable.

b) La partícula se mueve hacia la derecha hasta el tiempo *t*, después se mueve hacia la izquierda.

c) El desplazamiento total de la partícula es positivo.

d) La partícula siempre se mueve hacia la derecha.

e) La partícula se mueve con rapidez constante.



Actividad 3.47

En la gráfica *v vs. t* mostrada, escoja cuál de las siguientes alternativas es correcta y justifique su respuesta.

a) La aceleración de la partícula es variable.

b) El desplazamiento es negativo.

c) La partícula cambia la dirección de la velocidad.

d) La aceleración de la partícula es cero.

e) La partícula no se mueve en línea recta.

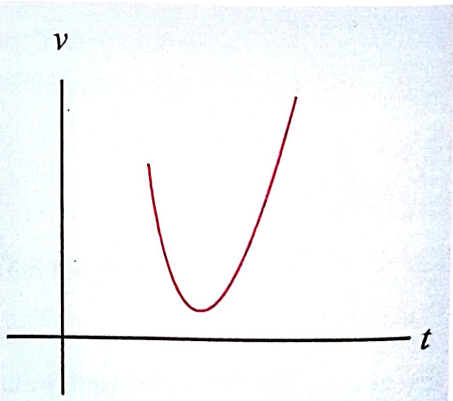
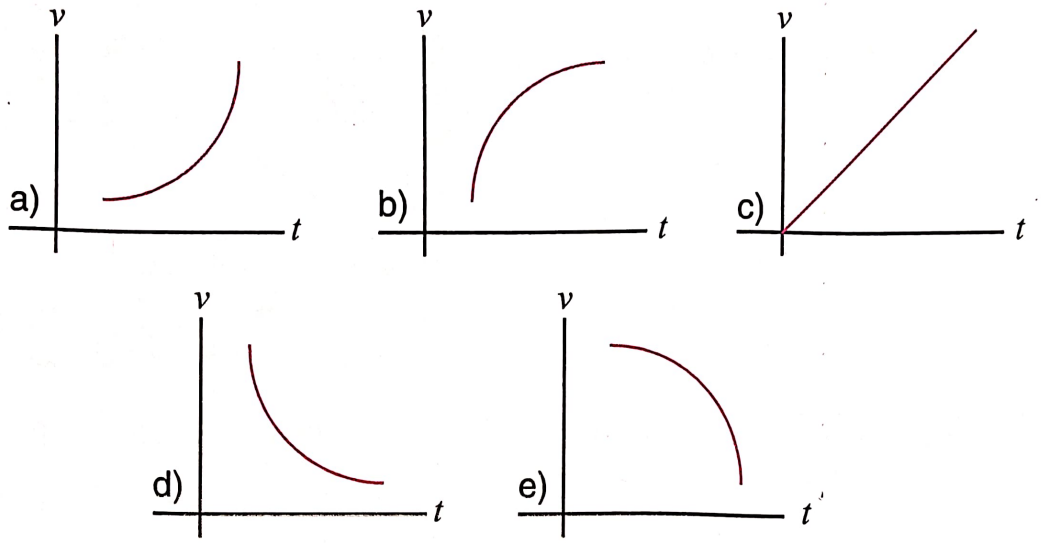


Figura 3.48

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

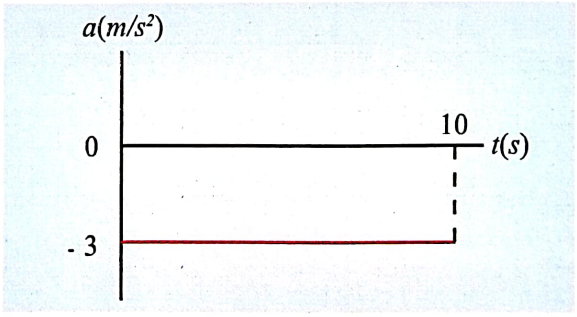
Actividad 3.48

Los siguientes gráficos de la figura muestran el movimiento de un objeto que se mueve en línea recta. En los diagramas velocidad *vs.* tiempo se muestra tal movimiento. Indique en ¿cuál de ellos la aceleración aumenta con el tiempo?



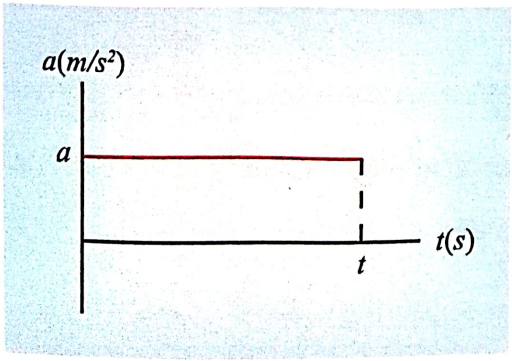
Actividad 3.49

El gráfico de la figura representa el movimiento de una partícula en línea recta. Calcule la velocidad de la partícula cuando $t = 8.0\,s$ suponiendo que para $t = 0\,s$ su velocidad era de $10\,m/s$?.



Actividad 3.50

En un gráfico *a vs. t*, ¿cuál de las siguientes alternativas es correcta?. Justifique su respuesta.



a) El área bajo la curva representa el desplazamiento.

b) El área bajo la curva representa la velocidad final.

c) El área bajo la curva representa el cambio de velocidad.

d) La pendiente de la curva es la aceleración.

e) La pendiente de la curva es la velocidad.

Actividad 3.51

Un estudiante A lanza una piedra verticalmente hacia abajo con una rapidez de $5.0\ m/s$ desde una ventana de un edificio ubicada a $10.0\ m$ de altura. Un estudiante B que se encuentra en la base del edificio lanza simultáneamente otra piedra hacia arriba con un velocidad de $+10.0\ m/s$. Considerando que el sistema de referencia se encuentra en la base del edificio, se pide:

a) Calcular la posición de encuentro de las piedras.

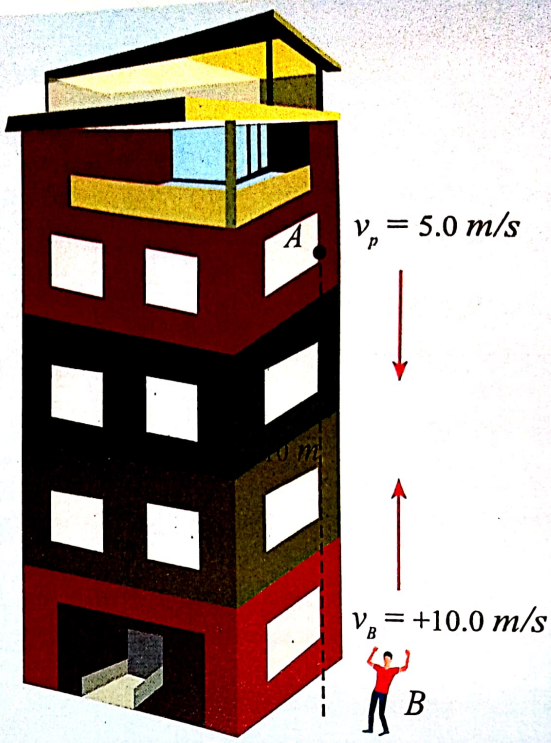
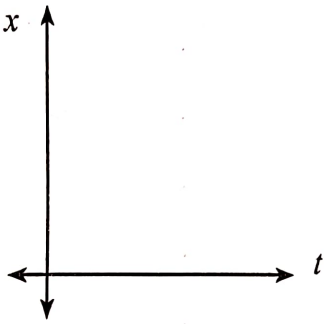
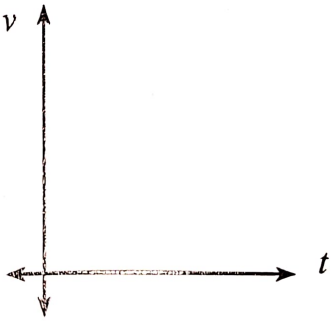


Figura 3.49

b) Realizar un gráfico x *vs.* t para las piedras A y B.



c) Realizar un gráfico v *vs.* t para las piedras A y B.



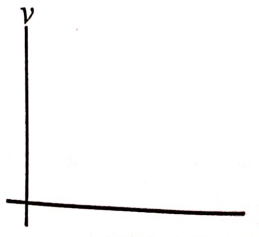
Actividad 3.52

Una nave espacial parte con una velocidad inicial $v_0 = 200\ m/s$ verticalmente hacia arriba y acelera constantemente durante $10.0\ s$ hasta alcanzar una altura de $2300\ m$, lugar donde se apagan los motores. Se pide:

a) Determine la altura máxima que alcanza la nave, medida desde en punto donde se apagaron los motores

Figura 3.50

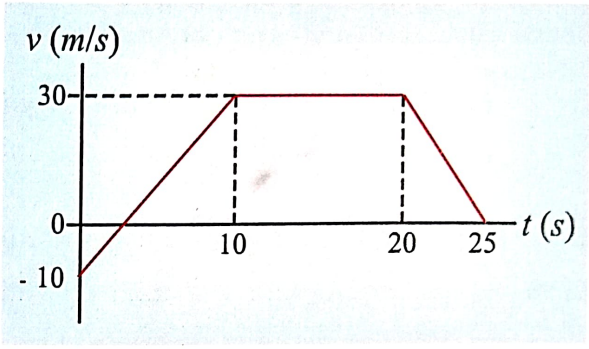
b) Construya un gráfico v *vs.* t, desde que partió la nave hasta que alcanza su altura máxima



Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 3.53

Una partícula se mueve en línea recta y su movimiento se describe en la gráfica v *vs.* t dada en la figura. Calcule:



a) La velocidad media para todo el recorrido.

b) La rapidez media para todo el recorrido.

c) El valor del tiempo cuando la velocidad es cero.

Actividad 3.54

Un policía en su patrulla partió de una posición inicial $x_0 = 0\ m$ con una velocidad inicial de $5.0\ m/s$ hacia la derecha (eje positivo de las x) persiguiendo a un rufián.

Cuando el rufián se encontraba a una distancia de $500\ m$ delante del policía, el policía acelera a $2.0\ m/s^2$ para alcanzarlo y detenerlo, se pide:

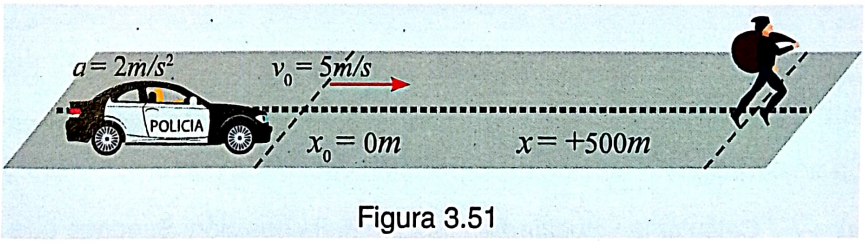
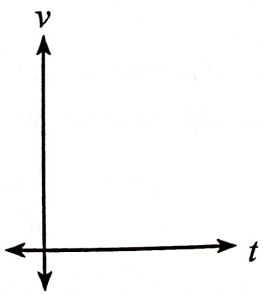


Figura 3.51

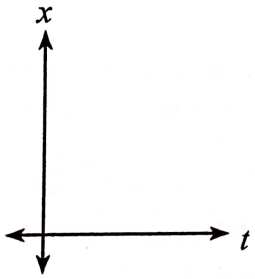
a) ¿Por cuánto tiempo el policía persiguió al rufián hasta alcanzarlo, si este se mueve a una velocidad constante de $10\ m/s$?

Considerando el sistema de coordenadas en la posición inicial del policía realizar:

b) Un gráfico v *vs.* t para el policía y el rufián



c) Un gráfico x *vs.* t para el policía y el rufián



Movimientos rectilíneos con aceleración variable

Actividad 3.55

La posición de una partícula varía con el tiempo de la forma: $x = 3t^3 - 2t^2 + 5$

Donde x está en metros y t en segundos.

a) Calcular la velocidad de la partícula para $t = 2.0\ s$

b) Calcular el tiempo para el cual la partícula se detiene.

c) Calcular la aceleración para el tiempo en que la partícula se detiene.

Actividad 3.56

El movimiento, en línea recta, de una partícula se describe como: $x = t^3 + 4t - 5$

Donde x (posición) está en metros y t en segundos.

Calcular:

a) La velocidad de la partícula a los $2.0\ s$.

b) La aceleración de la partícula a $t = 20\ s$.

c) El valor del tiempo al cual la partícula se detiene.

Actividad 3.57

La aceleración en función de la posición está dada por: $a = x^2 - 2x + 5$

a) Calcular la velocidad en función de la posición. Suponga que para $t = 0$, la posición es $x = x_0 = 0$ y $v = 0$.

Nota: Usar la ecuación 3.22 $\left(a = v\dfrac{dv}{dx}\right)$

b) ¿Cuál es el valor de la velocidad de la partícula cuando la posición es igual a $2.0\ m$?

Actividad 3.58

La siguiente ecuación $x = t^4 - 3.0t^2 + 2t - 10$, describe el movimiento de una partícula en línea recta, en unidades de *S.I.* Determinar a los $5.0\ s$:

a) La posición.

b) La velocidad.

c) La aceleración.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

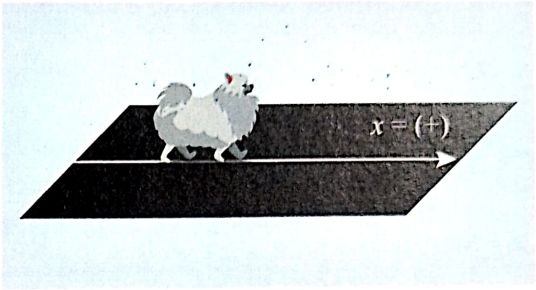
Actividad 3.59

Snow es un perro mascota que corre en línea recta y cuya posición está descrita por la siguiente ecuación $x = 1.5\,t^3 - 2.0\,t^2 + 20$ en unidades del *S.I.* Cuando Snow se detiene instantáneamente, se pide:

a) Calcular el tiempo.

b) Calcular la posición.

c) Calcular la aceleración.



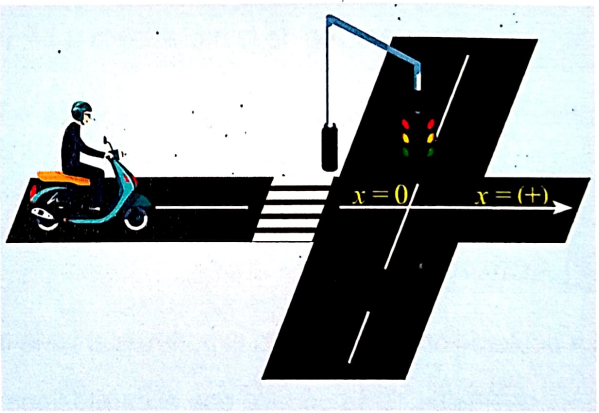
Actividad 3.60

Un conductor de una motocicleta está inicialmente en reposo frente a un semáforo como se muestra en la figura. La trayectoria de la motocicleta es en línea recta y la posición de x respecto al semáforo es $x(t) = 2.0\,t^3 - 5$ con la información proporcionada, se pide:

a) Determinar la posición inicial de la motocicleta.

b) Determinar el tiempo que transcurre desde que el conductor decide arrancar hasta que pasa por el semáforo.

c) Determinar la velocidad que tiene la motocicleta al pasar por el semáforo.



Actividad 3.61

La velocidad de una partícula que se mueve en línea recta se describe en función del tiempo con la siguiente ecuación $v = (5.0t^3 + 3.0t^2)\ [m/s]$, en unidades del *S.I.* Sabiendo que la partícula en $t_0 = 0\ s$ se encontraba a $x_0 = 6.0\ m$, se pide:

a) Determinar la velocidad de la partícula a los $5.0\ s$.

b) Determinar la aceleración de la partícula a los $5.0\ s$.

c) Determinar la posición de la partícula a los $5.0\ s$.

Actividad 3.62

Un auto se mueve en línea recta con una aceleración que varía con el tiempo como se indica a continuación $a = 10.0 - 5.0t^2$. Conociendo que el auto parte de una posición inicial $60\ m$ en $t_0 = 0$ y con $v_0 = 0\ m/s$. Se pide:

a) Determinar el tiempo cuando el auto vuelve a estar en reposo instantáneo.

b) Determinar la velocidad a los $4.0\ s$.

Actividad 3.63

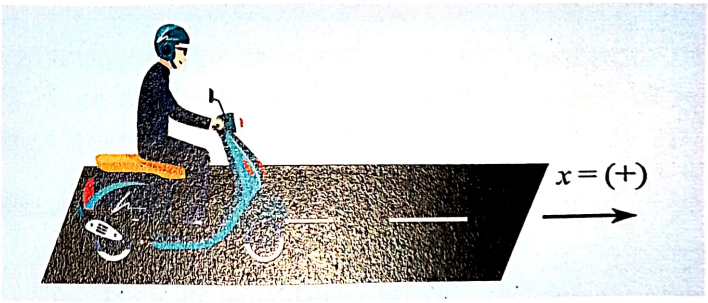
Una motocicleta se mueve en la dirección positiva del eje x, con una velocidad que varía con la siguiente expresión $v = 0.5\sqrt{x}$. Si en $t = 0$ la motocicleta se encuentra en la posición $x = 0\ m$ y la velocidad es $v_0 = 0$.

Determinar:

Usar: $a = v\dfrac{dv}{dx}$

a) La velocidad de la motocicleta a $x = 10\ m$.

b) La aceleración de la motocicleta a $x = 10\ m$.



Actividad 3.64

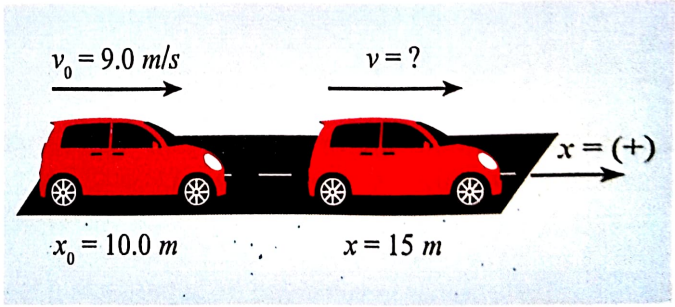
La aceleración de un carrito experimental varia con la posición con la siguiente expresión:

$a = -\dfrac{50\ m^2/s^2}{x}$. Si se conoce que el carrito tiene una velocidad de $9.0\ m/s$ en una posición de $x = 10.0\ m$.

Se pide:

Usar $\int_{x_0}^{x}\frac{dx}{x} = lnx\Big|_{x_0}^{x}$

a) Determinar la velocidad del carrito a los $15.0\ m$.



b) Determinar la posición donde el carrito tiene reposo instantáneo.

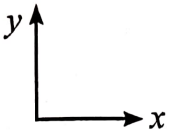
PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: ..... Paralelo: .....

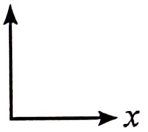
EN LOS PROBLEMAS PROPUESTOS TRABAJAR CON $g = 10\ m/s^2$

3.1 Desde el filo de una azotea se lanza una piedra P_1 con una rapidez hacia arriba de v_0. Desde el mismo lugar y en el mismo tiempo, se lanza otra piedra P_2 con una rapidez hacia abajo de v_0. ¿Qué se puede afirmar acerca de la rapidez con que golpean la Tierra.

3.2 ¿Cuando un objeto se mueve hacia arriba la aceleración de la gravedad es positiva o negativa? Explique.



3.3 ¿Cuando un cuerpo se mueve hacia abajo la aceleración de la gravedad es positiva o negativa? Explique.

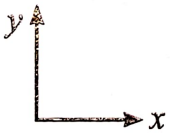


3.4 Cuando una piedra que es lanzada hacia arriba y llega a su altura máxima, ¿cuál es el valor de su aceleración?

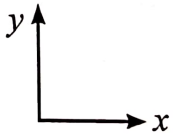
3.5 Suponga que usted lanza una piedra rápidamente hacia abajo. Entonces la aceleración con que se mueve la piedra ¿será mayor, igual o menor que el valor de la aceleración de la gravedad?

3.6 Un objeto de masa $m_1 = 2\ kg$ y otro objeto de masa $m_2 = 4\ kg$ son lanzados hacia arriba con la misma velocidad inicial, ¿cuál de ellos alcanza mayor altura?

3.7 Un cuerpo se mueve hacia la derecha y su rapidez va disminuyendo paulatinamente, entonces su aceleración es ¿positiva o negativa? Explique.



3.8 Un cuerpo se mueve hacia la izquierda y su rapidez se va incrementando paulatinamente, entonces ¿su aceleración es positiva o negativa? Explique.



3.9 Un cuerpo parte en linea recta con una velocidad inicial de 30 m/s, y después de 40 *segundos* su velocidad es de - 10 m/s. Calcule la distancia total recorrida por el cuerpo, suponiendo aceleración constante.

3.10 Un carro parte de la ciudad A y se dirige hacia la ciudad B con velocidad constante de +80 km/h. Al mismo tiempo, otro carro sale de la ciudad B y se dirige hacia la ciudad A con velocidad constante de - 60 km/h. Cuando los carros estén a 6 minutos de cruzarse, ¿qué distancia hay entre ellos?

3.11 Desde la terraza de un edificio se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20.0 m/s. Después de 3.0 *segundos* se deja caer una segunda piedra desde el mismo lugar. Si las dos piedras llegan al suelo al mismo tiempo, ¿cuál es el tiempo en que la segunda piedra llega al suelo?

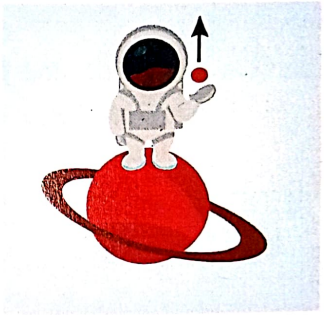
3.12 Desde la azotea de un edificio se lanza una piedra hacia arriba con una rapidez inicial de 20.0 m/s y tarda 8.0 segundos en llegar al suelo, ¿cuál es la distancia total recorrida por la piedra?

3.13 Desde una altura de 500 m se deja caer un objeto. ¿A cuántos m desde el punto donde el objeto cae, debe encontrarse un camión para que el objeto caiga sobre él? Suponga que el camión se mueve con velocidad constante de 20 m/s.

3.14 Un carro sale de la ciudad A con una rapidez de $60km/h$ y se mueve hacia la ciudad B. Al mismo tiempo un carro sale de la ciudad B y se mueve hacia la ciudad A a $80km/h$. Suponga que la distancia entre las dos ciudades es de $280km$. Con respecto a la ciudad A, calcule la distancia en que los carros se cruzan.

3.15 Un avión vuela horizontalmente a una altura de 1000 m con una velocidad constante de 500 m/s cuando suelta una bomba. ¿Cuántos segundos toma la bomba en llegar al blanco que se encuentra en el suelo?.

3.16 Para determinar la aceleración de la gravedad en un planeta desconocido, un astronauta lanza una roca verticalmente hacia arriba con una velocidad de $18m/s$ y tarda $6s$ en llegar al suelo, se pide:



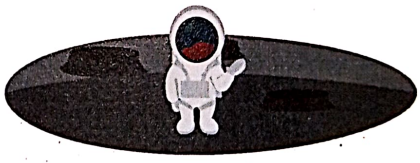
a) Determinar el valor de aceleración de la gravedad en ese planeta

b) Determinar la altura máxima que alcanza la roca

3.17 Se lanza una roca verticalmente hacia arriba con una velocidad de 14.0 m/s, sobre la superficie lunar donde la aceleración de la gravedad es 1.67 m/s^2. Se pide:

a) El tiempo total de vuelo de la roca

b) La altura máxima



3.18 Una bala de 20.0 gramos es disparada con una rapidez de 200 m/s hacia un árbol. El tiempo que la bala tarda en llegar al reposo dentro del árbol es de 0.25 s. ¿Cuál fue la aceleración promedio de la bala?

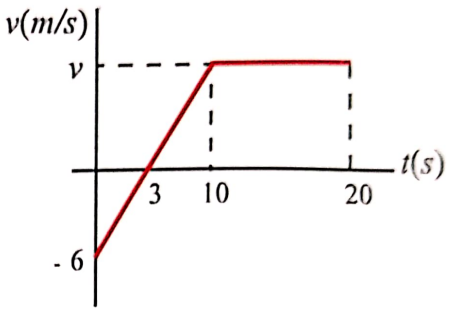
3.19 Una partícula se mueve en línea recta hacia la derecha. Al tiempo $t = 0\ s$ se halla a 10 m hacia la izquierda del origen y luego se mueve con velocidad constante de modo que se acerca al origen. Después de 5.0 segundos se halla a 4.0 m a la derecha del origen. Realice un gráfico x *vs.* t y calcule la velocidad media de la partícula en el intervalo entre $t = 0$ y $t = 5.0\ s$.

3.20 Desde lo alto de un acantilado de 200 m de altura se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 20 m/s. Calcule la distancia total recorrida por el objeto usando un gráfico v *vs.* t.

Nombre: ..... Paralelo: .....

3.21 Un globo se mueve verticalmente hacia arriba a 20.0 *m/s*. Si una persona que se encuentra dentro del globo suelta un objeto en el instante en que el globo está a 300 *m* del suelo, ¿cuál es el tiempo en que el objeto llegará al suelo?

3.22 El gráfico de la figura corresponde al movimiento de una partícula en línea recta. A partir del gráfico calcule:



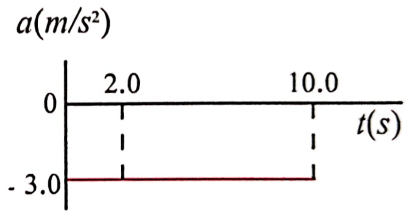
a) El desplazamiento para todo el recorrido.

b) La distancia total recorrida.

c) La velocidad media para todo el recorrido.

d) La rapidez media para todo el recorrido.

3.23 Usando el gráfico mostrado, calcule la velocidad a los 10.0 segundos sabiendo que la velocidad a los dos segundos es de - 14.0 *m/s*.



3.24 Una persona se mueve 100 *m* hacia el Norte y luego regresa 20 *m*. ¿Cuál es la magnitud y la dirección del desplazamiento?

a) 120 *m* hacia el Norte

b) 100 *m* hacia el Norte

c) 80 *m* hacia el Norte

d) 0 *m* hacia el Sur

e) 20 *m* hacia el Sur.

3.25 Un objeto da media vuelta a lo largo de una pista de 100 *m* de radio. Calcule la rapidez media del objeto si tardó 3.14 s en el recorrido.

a) 628 *m/s*

b) 200 *m/s*

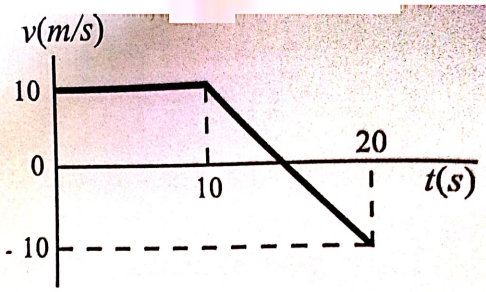
c) 100 *m/s*

d) 80 *m/s*

e) 31.4 *m/s*

3.26 Un objeto *A* se mueve a 10.0 *m/s* hacia la derecha. Después de que han trascurrido 5.0 segundos, otro objeto *B* parte del mismo punto desde el reposo e imprime una aceleración de 3.0 *m/s*². ¿Después de cuántos segundos de que salió el objeto *B* alcanza al objeto *A*?

3.27 En el gráfico de la figura mostrada, corresponde al movimiento de una partícula en línea recta. Calcule la distancia total recorrida por la partícula durante todo el recorrido.



a) 150 *m* b) 125 *m*

c) 100 *m* d) 75 *m*

e) 50 *m*

3.28 Para el gráfico del problema 3.27 calcule la magnitud de la velocidad media durante todo el recorrido.

3.29 Un objeto se mueve hacia la izquierda (*hacia el eje - x*) y poco a poco se va deteniendo, entonces la aceleración:

a) Está dirigida hacia la izquierda.

b) Está dirigida hacia la derecha.

c) Está dirigida perpendicularmente a la trayectoria.

d) La aceleración es cero.

3.30 Una partícula parte del origen con una velocidad inicial de +10 *m/s* y se mueve en la dirección del eje positivo de las *x* con aceleración constante de - 1 m/s^2. ¿Cuál es su desplazamiento después que han transcurrido 20 segundos?

a) 400 *m* b) 300 *m*

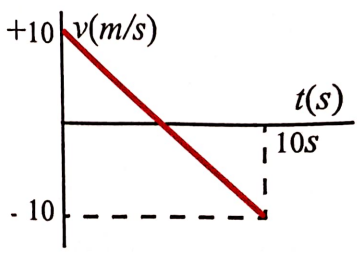
c) - 400 *m* d) 0 *m*

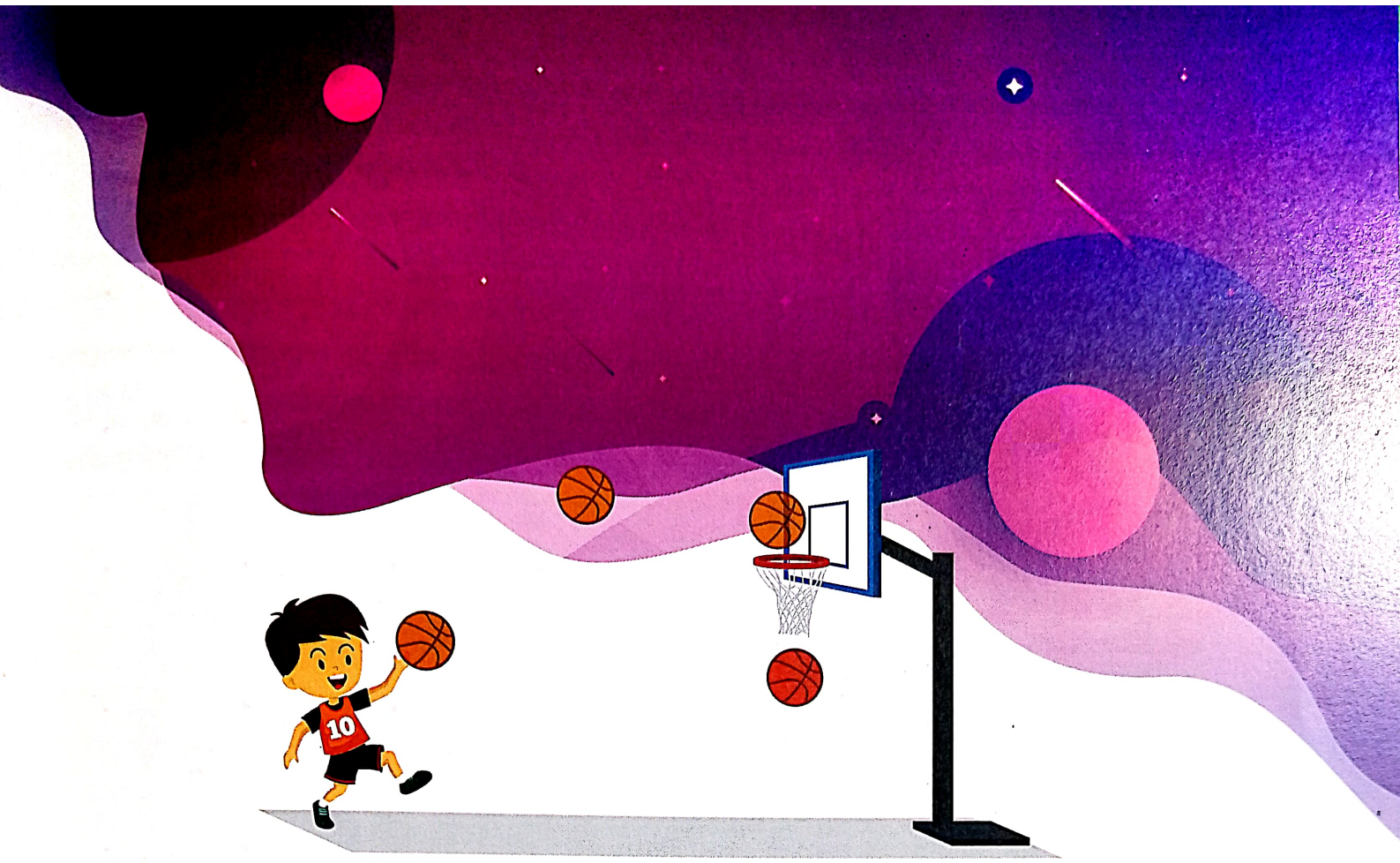
3.31 Desde un puente que se encuentra a 80.0 *m* sobre el agua se deja caer una piedra. Después de 2.0 *s* se lanza una segunda piedra desde el mismo lugar, ¿cuál debe ser la velocidad inicial que debe tener la segunda piedra para que las dos piedras lleguen al agua al mismo tiempo?

a) Cero b) 10 *m/s* c) - 10 *m/s*

d) - 30 *m/s* e) - 35 *m/s*

3.32 A partir del gráfico *v vs. t* mostrado en la figura construya un gráfico *x vs. t*, luego calcule el desplazamiento y la distancia recorrida por la partícula durante los 10 *s*. Considere que parte del origen.





4 | CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

No todo se mueve en línea recta, en la naturaleza muchos cuerpos y partículas se mueven en dos o tres dimensiones, donde la velocidad y la aceleración no están en la misma línea de acción. Pero muchos de los movimientos de los cuerpos pueden ser estudiados con buena aproximación en el plano, es decir, en dos dimensiones. Así por ejemplo, cuando orientamos un chorro de agua hacia las plantas para regarlas, cuando se observa el chorro de agua que sale por un orificio de un reservorio, cuando un deportista lanza la jabalina en una competencia, cuando un bote trata de cruzar un río, cuando analizamos el movimiento de las ruedas de un auto; todos estos son ejemplos de movimientos en dos dimensiones y algunos pueden observarse en las figuras 4.1 y 4.2.

4 | CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

4.1 MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

Un caso del movimiento en dos dimensiones es el movimiento de proyectiles cuando son lanzados sobre la superficie terrestre. Este es un movimiento importante en el cual el proyectil se mueve en dos o en tres dimensiones. En el presente capítulo analizaremos solo el movimiento en dos dimensiones, este movimiento tiene aceleración constante, es decir, su magnitud y su dirección permanecen invariables en el espacio y en el tiempo siempre y cuando se desprecie la resistencia del aire.

En este capítulo el movimiento de proyectiles será analizado en dos dimensiones, es decir, en el plano xy. Si se lanza un proyectil en el campo gravitacional terrestre con una velocidad inicial v_0, formando un ángulo θ con respecto a la horizontal x, las componentes de la velocidad inicial en el eje x y en el eje y son v_{0x} y v_{0y}, respectivamente.

En el punto de altura máxima el proyectil tiene velocidad y aceleración diferente de cero: $v_x = v_{0x} = v_0 \cos\theta = constante$, $v_y = 0$ y $a = g\downarrow$

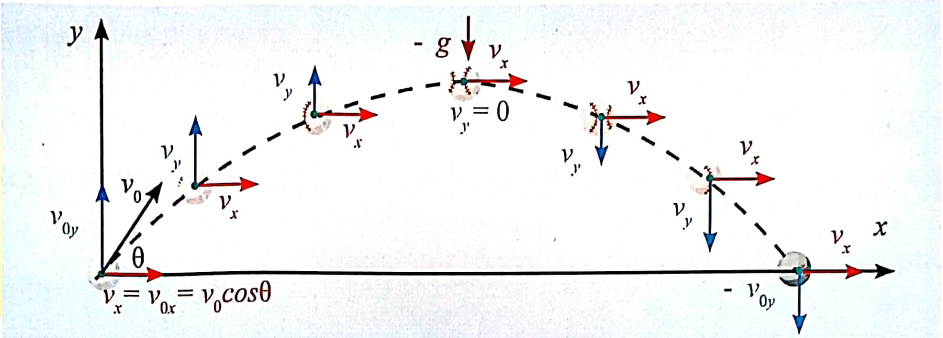


Figura 4.1

La velocidad en x es constante (Despreciando la resistencia del aire)

La velocidad en y varía con el tiempo

Debido a que verticalmente existe una aceleración llamada gravedad, que está siempre dirigida hacia al centro de la tierra, la componente de la velocidad en y, v_y, será variable con respecto al tiempo. **En el eje horizontal no existe aceleración ya que se desprecia la resistencia del aire, por lo tanto, la componente de la velocidad en el eje x permanece invariable.** La trayectoria que describe un cuerpo lanzado con un ángulo respecto a la horizontal, en el campo gravitacional de la Tierra, puede ser descrita en un plano xy como se indica en la figura 4.1.

4.2 ECUACIONES A UTILIZARSE

En el eje y influye la aceleración de la gravedad, por lo tanto, el movimiento vertical será analizado usando las ecuaciones del movimiento uniformemente variado o de caida libre, **tomando como referencia el eje y(+) positivo hacia arriba y negativo hacia abajo. Con esta consideración se escriben las siguientes ecuaciones.**

$$v_y = \pm v_{0y} - gt \qquad (4.1)$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g(y - y_0) \qquad (4.2)$$

$$y - y_0 = \pm v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (4.3)$$

Como horizontalmente no existe aceleración en el eje horizontal, se analizará con las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme con velocidad constante, siempre y cuando se desprecie la resistencia del aire.

$$x - x_0 = v_x \times t \qquad (4.4)$$

$$x - x_0 = v_0 \cos\theta \times t \qquad (4.5)$$

La velocidad del cuerpo en cualquier posición puede escribirse como:

$$v = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} \qquad (4.6)$$

La magnitud de la velocidad o rapidez está dada por la siguiente ecuación.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad (4.7)$$

Y el ángulo con respecto a la horizontal se determina por la función trigonométrica tangente de θ

$$\tan\theta = \left| \frac{v_y}{v_x} \right| \qquad (4.8)$$

4.2.1 DEMOSTRACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA TRAYECTORIA

La ecuación de la trayectoria descrita por una partícula lanzada con una velocidad inicial v_0 y un ángulo θ con respecto a la horizontal, resulta de combinar las ecuaciones 4.3 y 4.5:

Considerando $x_0 = 0m$ y $y_0 = 0m$

$$y - y_0 = \pm v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x - x_0 = v_0 \cos\theta \times t$$

Despejando $t = \dfrac{x}{v_0 \cos\theta}$, para, luego reemplazar en la ecuación 4.3

$$y = \frac{v_0 \operatorname{sen}\theta}{v_0 \cos\theta} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\theta}$$

Simplificando v_0 y usando la identidad trigonométrica $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta + 1$

Reemplazando se tiene $y = (\tan\theta)\, x - \dfrac{g}{2v_0^2}(\tan^2\theta + 1)x^2$ (4.9) Esta es la ecuación de la trayectoria

4.2.2 CÁLCULO DEL ALCANCE HORIZONTAL

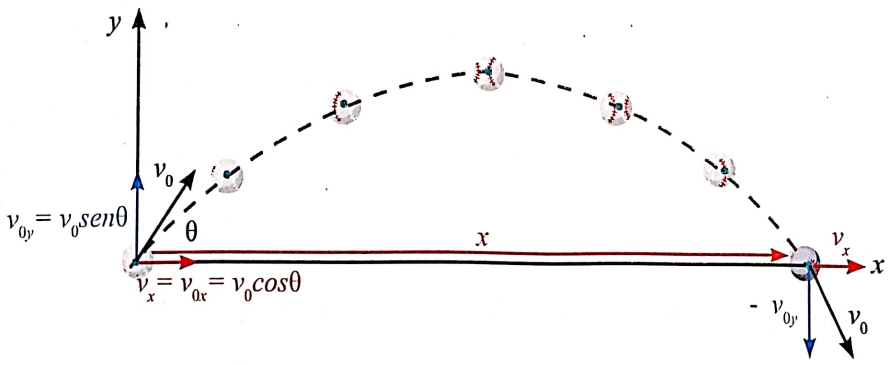


Figura 4.2

El alcance está dado por: $x = v_0 \cos\theta \times t_{vuelo}$

Donde el tiempo de vuelo como en la figura 4.2 está dado por: $t_{vuelo} = \dfrac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g}$

$$x = v_0 \cos\theta \left(\frac{2v_0 \operatorname{sen}\theta}{g} \right) = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{g}$$

Por trigonometría $sen2\theta = 2\, sen\theta\, cos\theta$

Así, el alcance horizontal es: $x = \dfrac{v_0^2 sen(2\theta)}{g}$ (4.10)

La ecuación 4.10 solamente es útil para calcular el alcance horizontal cuando la trayectoria que describe un cuerpo es una parábola simétrica, es decir que el punto de lanzamiento y el punto de llegada se hallan en el mismo plano horizontal (**Llamada condición de simetría**).

4.2.3 EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 4.1 - Un proyectil es lanzado desde el suelo con una rapidez inicial de $10.0\ m/s$ y formando un ángulo de $30.0°$ con la horizontal como se muestra en la figura 4.2. Calcule:

a) El tiempo en que el proyectil llega a su máxima altura.

b) El tiempo en el que el proyectil vuelve al suelo.

c) La altura máxima que alcanza el proyectil.

d) El alcance.

e) La velocidad del proyectil cuando llega al suelo.

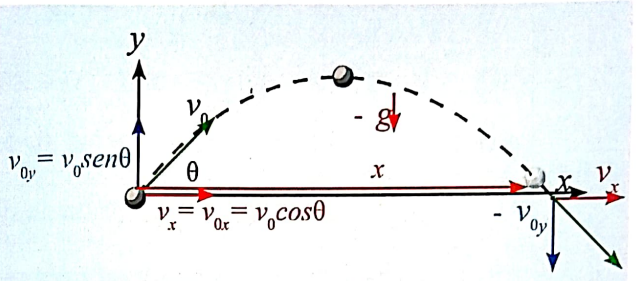


Figura 4.2

Solución

a) Cuando el proyectil llega a su altura máxima, su velocidad en la dirección vertical es cero, es decir, $v_y = 0$. De la expresión: $v_y = v_{0y} - gt$ y haciendo $v_y = 0$, el tiempo de subida es: $t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 sen\theta}{g}$

Remplazando los datos dados en el ejercicio, $t_{sub} = \frac{10.0\ m/s \times sen30.0°}{10\ m/s^2} = 0.500\ s$

b) Para calcular el tiempo de vuelo del proyectil, se puede usar la ecuación del desplazamiento:

$y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$; como el proyectil llega al plano horizontal, entonces $y = 0$. De este modo se calculará el tiempo total.

Así, $0 = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$ despejando t, $t = \frac{2v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 sen\theta}{g}$

y, reemplazando datos del problema queda: $t = \frac{2\ (10.0\ m/s)\ (sen30.0°)}{10\ m/s^2} = 1.00s$

Por lo tanto, el tiempo de vuelo será dos veces el tiempo de subida.

En este ejemplo se puede apreciar que el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada.

c) En el punto de altura máxima, la velocidad en la dirección vertical, v_y es cero. $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$

Despejando y_{max}, se tiene: $y_{max} = \frac{(v_{0y})^2}{2g} = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g}$

Reemplazando datos: $y_{max} = \frac{(10.0m/s)^2 \times sen^2 30.0°}{2\ (10\ m/s^2)} = 1.25m$

d) Para calcular el alcance, usaremos la ecuación $x = v_{0x}t$ en donde el tiempo será el tiempo de vuelo.

Considerando que el tiempo de vuelo es de $1.00\ s$ como se demostró en el literal b de este ejemplo, entonces: $x = v_{ox} \times t_{vuelo} = v_0 cos\ \theta \times t_{vuelo}$

Remplazando datos: $x = 10.0\ m/s\ cos30.0° \times 1.00s = 8.70\ m$

El alcance puede calcularse con la siguiente ecuación 4.10 siempre que describa una parábola simétrica, es decir, que la altura del punto de lanzamiento coincida con la altura del punto de llegada.

$$x = \frac{v_0^2 sen\,2\theta}{g} \qquad (4.10)$$

$$x = \frac{(10.0m/s)^2 sen\ 2(30.0°)}{10\ m/s^2} = 8.70\ m$$

e) Cuando la partícula llega al suelo, y considerando que el suelo es una superficie horizontal, las componentes de la velocidad serán iguales a las componentes de la velocidad al momento que el proyectil salió desde el punto de partida. El único cambio es que la componente de la velocidad en la dirección vertical será negativo en el instante que golpea el suelo, la componente en x mantiene su magnitud y dirección.

La componente en y es: $v_{0y} = -\ v_0 \, sen\theta$ y la componente de x es: $v_x = v_{0x} = v_0 \, cos\theta$

$v_y = -\ 10.0\ m/s\ sen\ 30^\circ$	$v_y = -\ 5.0\ m/s$	$v_x = 10.0 m/s\ cos 30^\circ$	$v_x = 8.70\ m/s$

La velocidad de la partícula al llegar al suelo será: $\vec{v} = (8.7\hat{i} - 5.0\hat{j})\ m/s$

El lector puede comprobar que el módulo de esta velocidad es igual a $10.0\ m/s$ y que su dirección es de $-\ 30^\circ$.

Ejemplo 4.2 - Una pelota se lanza desde la terraza de un edificio de $60.0\ m$ de altura con una componente de velocidad inicial $v_{oy} = 25.0\ m/s$ y con un ángulo de 30.0° con respecto a la horizontal, como se indica en la figura 4.3. La pelota asciende y luego baja impactando en el piso. Determinar:

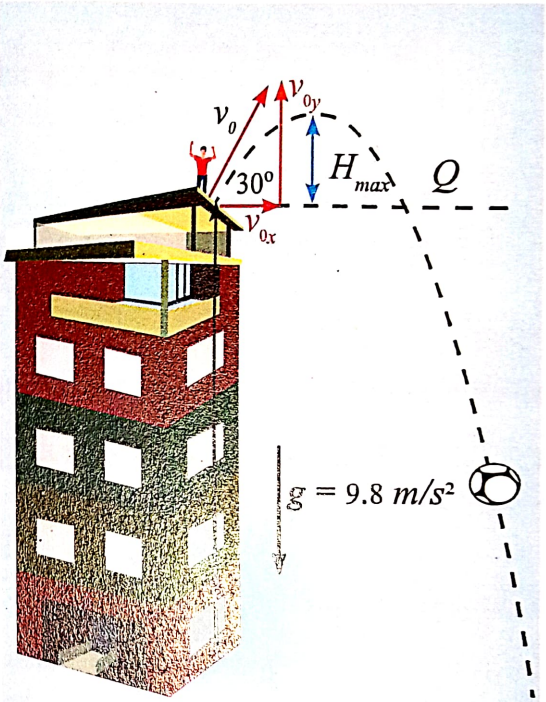


Figura 4.3

a) La componente de la velocidad inicial v_{0x}.

b) La altura máxima que alcanza la pelota con respecto a la terraza del edificio.

c) El tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

d) La magnitud de la velocidad de la pelota en el punto Q.

e) La velocidad de la pelota cuando llega al suelo.

f) La distancia horizontal a la que llega la pelota.

g) La magnitud de la velocidad media desde que la pelota fue lanzada hasta llegar al suelo.

Solución

a) La componente de la velocidad v_{0x}

Para determinar la componente v_{ox}, usamos la función trigonométrica $tan\theta = \dfrac{v_{oy}}{v_{ox}}$, luego se despeja la componente de velocidad v_{0x} y se tiene:

$$v_{0x} = \frac{v_{0y}}{tan\ \theta} = \frac{25.0\ m/s}{tan\ 30.0^\circ} = 43.3\ m/s$$

b) La altura máxima que alcanza la pelota.

Si colocamos el sistema de referencia sobre la terraza del edificio y aplicamos la siguiente ecuación $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\,(y - y_0)$ entonces, $0 = (25.0)^2 - 2(10)\,(H_{max} - 0)$ por lo tanto, $H_{max} = 31.2\ m$

c) El tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo

$$y - y_0 = \pm\, v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad -60 - 0 = +25t - \frac{1}{2}(10)t^2 \quad \rightarrow \quad 5t^2 - 25t - 60 = 0$$

De la solución de la ecuación cuadrática se tiene $t_1 = 6.77\ s$ y $t_2 = -\ 1.77s$, entonces, se toma como solución el valor positivo $t_1 = 6.77s$.

d) La magnitud de la velocidad de la pelota en el punto Q.

El punto Q se halla al mismo nivel que el punto de lanzamiento de la pelota. $v_x = 43.3\ m/s$, $v_y = -\ 25.0\ m/s$ entonces , $v = 50.0\ m/s$.

e) La velocidad de la pelota cuando llega al suelo.

La componente de la velocidad en x es: $43.3\ m/s$ y la componente de la velocidad en y.

$$v_y = \pm v_{oy} - gt \qquad v_y = (+25.0\ m/s) - (10\ m/s^2)(6.77s) = -\ 42.7\ m/s$$

Por lo tanto la velocidad es $v = 43.3\ i - 42.7\ j\ (m/s)$. También puede ser expresada con la magnitud de la velocidad resultante y su ángulo: $v = 60.8\ m/s$ y $\theta = -\ 44.6°$.

f) La distancia horizontal a la que llega la pelota es: $x = v_x t = 43.3\ m/s\ (6.77\ s) = 293.1\ m$

g) La magnitud de la velocidad media desde que la pelota fue lanzada hasta llegar al suelo.

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \qquad |\Delta \vec{r}| = \sqrt{(60)^2+(293.1)^2} = 299.2m \quad \text{y} \quad \Delta t = 6.77s$$

$$v_m = \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} = \frac{299.2m}{6.77s} = 44.2\ m/s$$

4.3 MOVIMIENTO CIRCULAR

4.3.1 DESPLAZAMIENTO ANGULAR

Es el cambio de la posición angular que presenta un cuerpo en todo su recorrido $\Delta\theta$. Las unidades más comunes en las que se puede representar el desplazamiento angular son: radianes, grados y revoluciones. El desplazamiento angular es el ángulo comprendido entre dos posiciones angulares θ_2 y θ_1 y su relación es: $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

Longitud de arco (s): Es la distancia o recorrido entre dos puntos de una trayectoria circular y puede determinarse con la siguiente ecuación.

$$S = \Delta\theta \times R \qquad (4.11)$$

donde $\Delta\theta$ está en radianes.

Radián (rad): Es el ángulo comprendido entre la longitud del arco (S) donde $S = R$, como se muestra en la figura 4.4.

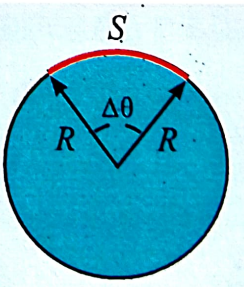


Figura 4.4

Otra forma de determinar el desplazamiento angular $\Delta\theta$, es despejando de la ecuación 4.11 y se obtiene la siguiente ecuación $\Delta\theta = \frac{S}{R}$

Para determinar la relación entre radianes y grados se toma una longitud de arco S igual a la longitud de una circunferencia de $2\pi R$ con un radio igual a R, luego se despeja el desplazamiento angular de la ecuación 4.11

$$\Delta\theta = \frac{S}{R}. \qquad \Delta\theta = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi\ rad$$

Como una vuelta o una revolución tiene 360°, entonces $360° = 2\pi\ rad$. Por lo tanto.

$$1\ rad = 57.3° \qquad 1\ rev = 360° = 2\pi\ rad$$

Ejemplo 4.3 - Un deportista corre en una pista circular una distancia de 800 m, la pista tiene un radio de 200 m, como se muestra en la figura 4.5. Determine:

a) El desplazamiento angular en radianes.

b) El desplazamiento angular en revoluciones.

c) El desplazamiento angular en grados.

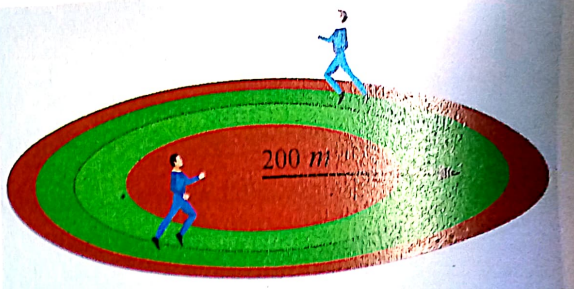


Figura 4.5

Datos:

S = longitud del arco (es la distancia que ha recorrido el deportista)

$S = 800\ m$

R = radio de la trayectoria circular. $R = 200\ m$.

Solución

a) Determine el desplazamiento angular en radianes.

El desplazamiento angular se despeja de la ecuación 4.11, como se muestra a continuación.

$$\Delta\theta = \frac{S}{R} \qquad \Delta\theta = \frac{800m}{200m}\ rad = 4.00\ rad$$

b) Determine desplazamiento angular en revoluciones.

Para determinar el desplazamiento angular en revoluciones se utiliza el factor de conversión $1\ revolución = 2\pi rad$

$$\Delta\theta = 4.00 rad \times \frac{1\ rev}{2\pi rad} = \frac{4 rev}{2\pi} = 0.637\ rev$$

c) Determine el desplazamiento angular en grados.

Para determinar el desplazamiento angular en grados se utiliza el factor de conversión $1\ revolución = 360^o$

$$\Delta\theta = 0.637\ rev \times \frac{360^o}{1 rev} = 229^o$$

4.4 RAPIDEZ ANGULAR MEDIA

Rapidez angular media (ω_m): es la relación entre el módulo del desplazamiento angular y el tiempo, es un escalar y representa la magnitud de la velocidad angular. Ver figura 4.6.

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad \omega_m = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad (4.12)$$

Rapidez angular instantánea (ω) se la obtiene al aplicar el límite a la rapidez angular media (ω_m) cuando Δt tiende a cero. Es la rapidez angular en un instante de tiempo.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (4.13)$$

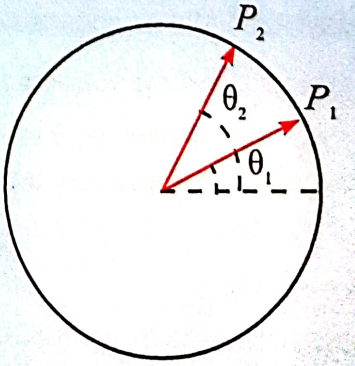


Figura 4.6

Ejemplo 4.4 - Una partícula se mueve desde el punto P_1 hasta el punto P_2 en una pista circular de radio $R = 3.0\ m$ en $0.500\ s$, como se indica en la figura 4.7. Si $\theta_1 = 15.0^o$ y $\theta_2 = 45.0^o$, determine:

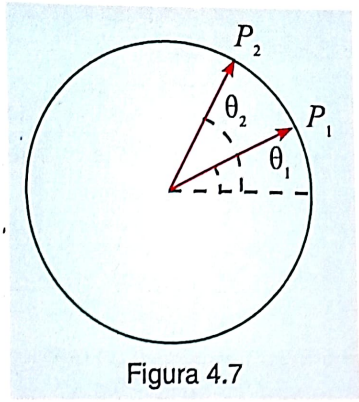


Figura 4.7

a) El desplazamiento angular.

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 45.0^0 - 15.0^0 = 30.0^0 \times \frac{2\pi}{360^o} = 0.524\ rad$$

b) La rapidez angular.

$$\omega = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{0.524\ rad}{0.500s} = 1.05\frac{rad}{s}$$

c) La distancia recorrida por la partícula

La distancia recorrida por la partícula es el arco de la circunferencia S.

Entonces $\Delta\theta = \dfrac{S}{R}$ $\quad S = \Delta\theta \times R = 0.524\ rad \times 3.0\ m = 1.6m$

4.5 VELOCIDADES ANGULARES MEDIA E INSTANTÁNEA

La velocidad angular media $(\vec{\omega})$ de un cuerpo que está rotando es un vector que representa el desplazamiento angular $\vec{\Delta\theta}$ en un intervalo de tiempo y está expresado como:

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t} \qquad \omega = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(t_2 - t_1)} \qquad (4.14)$$

La velocidad angular instantánea $(\vec{\omega})$ se la representa como el límite de la velocidad angular media en un intervalo de tiempo muy pequeño Δt $(\Delta t \rightarrow 0)$ y está expresada como:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta\theta}}{\Delta t}$$

La velocidad angular es un vector perpendicular al plano y cumple la regla de la mano derecha. Ver figura 4.8 y 4.9. Si el cuerpo de la figura 4.8 está girando en contra de las manecillas del reloj, la regla de la mano derecha consiste en colocar los dedos de la mano derecha en la dirección de rotación del cuerpo, el pulgar extendido muestra la dirección del vector velocidad angular. La figura 4.8 muestra que el vector velocidad angular está saliendo del plano de la hoja del papel.

De forma vectorial la velocidad lineal o tangencial se obtiene por el producto vectorial o producto cruz. Ver figura 4.10.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (4.15)$$

De forma escalar se obtiene la rapidez lineal o tangencial de la siguiente manera.

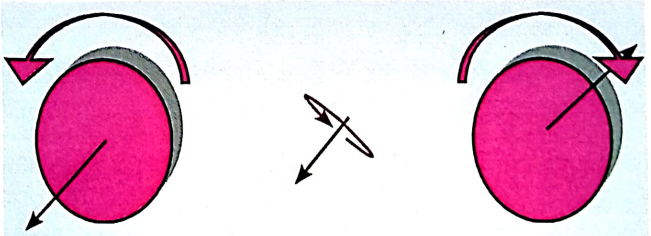


Figura 4.8 $\Delta\theta(+)$ $\omega(+)$

Figura 4.9 $\Delta\theta(-)$ $\omega(-)$

$$v = \omega r \qquad (4.16)$$

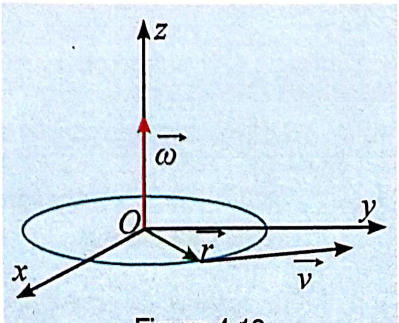


Figura 4.10

Nota: El signo de $\vec{\omega}$ ***es positivo cuando*** $\Delta\theta$ ***(desplazamiento angular) es contrario al movimiento de las manecillas del reloj y es negativo cuando es en la misma dirección de las manecillas del reloj. La unidad de la velocidad angular es*** (rad/s).

4.6 PARÁMETROS QUE AYUDAN A DESCRIBIR EL MOVIMIENTO CIRCULAR

En el movimiento circular encontramos parámetros como el período (T), la frecuencia (f) y la frecuencia angular (ω), los mismos que se describen a continuación.

4.6.1 PERÍODO (T)

El período es el tiempo que tarda un cuerpo en realizar una revolución o una vuelta completa. Su unidad es el segundo (s) y su símbolo es T.

$$T = \frac{tiempo}{Número\ de\ revoluciones} = \frac{t}{N}\ [s] \qquad (4.17)$$

4.6.2 FRECUENCIA (f)

La frecuencia es el número de revoluciones que realiza un cuerpo en un segundo y su unidad es $[1/s]$, llamada también Hertz (Hz). El símbolo de la frecuencia es f.

$$f = \frac{Número\ de\ revoluciones}{tiempo} = \frac{N}{t}\ [1/s] \qquad (4.18)$$

Nota: Una revolución es una vuelta completa, entonces $1rev = 2\pi\ rad$.

4.6.3 RELACIÓN ENTRE EL PERÍODO, LA FRECUENCIA Y LA FRECUENCIA ANGULAR

El período es el inverso de la frecuencia $T = \frac{1}{f}$ (4.19)

La frecuencia angular (ω) en rad/s se relaciona con la frecuencia $f\,(1/s)$ y el periodo (T):

$\omega = 2\pi f$ (4.20) $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$ (4.21)

4.7 ACELERACIÓN CENTRÍPETA.

Si un cuerpo se mueve con rapidez constante v, en una trayectoria circular como se muestra en la figura 4.11, su velocidad cambia de dirección constantemente, y este cambio constante del vector velocidad da origen a una aceleración llamada **aceleración centrípeta ($\vec{a}_c$) que está dirigida hacia el centro de su trayectoria.**

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad [m/s^2] \qquad (4.22)$$

En la figura 4.11 puede observar que:

- **La velocidad tangencial o lineal siempre es tangente a la trayectoria.**
- **La acelerción centrípeta siempre está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.**
- **La aceleración centrípeta es perpendicular a la velocidad tangencial.**

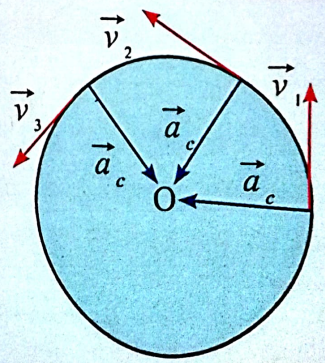


Figura 4.11

Ejemplo 4.5 - Un ciclista viaja a una velocidad constante de 60.0 *km/h*. Si el diámetro de las llantas de la bicicleta es 0.800 *m*. Ver figura 4.12.

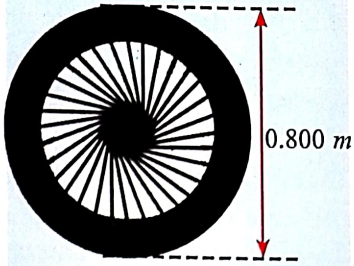


Figura 4.12

a) Calcule la rapidez angular de una llanta de la bicicleta.

Para determinar la rapidez angular primero se procede a realizar la conversión de unidades de *km/h* a *m/s*, como se indica a continuación. También se determina el radio en metros.

$$60.0\,\frac{km}{h} \times \frac{1000m}{km} \times \frac{h}{3600s} = 16.7\ m/s$$

$$r = \frac{d}{2} = \frac{0.800\ m}{2} = 0.400\ m$$

Luego se utiliza la ecuación 4.16 para despejar la rapidez angular $\omega = \frac{v}{r} = \frac{16.7\ m/s}{0.400\ m} = 41.7\,\frac{rad}{s}$

b) Calcule el período de rotación de una llanta.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{41.7\ 1/s} = 0.151\ s$$

c) Calcule la frecuencia de rotación de una llanta

$$T = \frac{1}{f} \qquad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0.151\ s} = 6.62\,\frac{1}{s} = 6.62\ Hz$$

d) Calcule la magnitud de la aceleración centrípeta de un punto de la periferia de la llanta

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad a_c = \omega^2 r = (41.7\ 1/s)^2 \times 0.400\ m = 696\ m/s^2$$

4.8 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME.

El movimiento circular uniforme es aquel que a iguales intervalos de tiempo le corresponde iguales desplazamientos angulares y su velocidad angular permanece constante.

Ecuaciones a utilizarse en el movimiento circular uniforme.

$$\omega_m = \frac{(\theta_2 - \theta_1)}{(t_2 - t_1)} = constante \qquad \theta_2 = \theta_1 + \omega t \qquad (4.23)$$

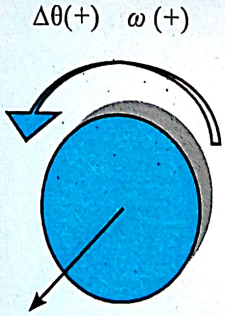


Figura 4.13

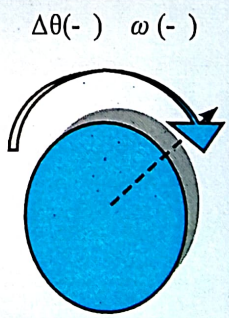


Figura 4.14

Ejemplo 4.6 - El ciclista del ejemplo 4.5 viaja a una velocidad constante de 60.0 *km/h*. Si el ciclista se mueve a velocidad constante durante 40.0 *minutos*. Calcular:

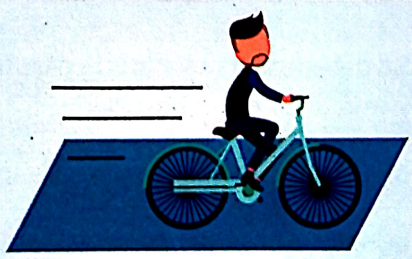


Figura 4.15

a) El desplazamiento angular en radianes.

Como en el ejemplo 4.5 se determinó la rapidez angular de 41.7 *rad/s*, luego, se realiza la conversión de unidades de minutos a segundos para finalmente utilizar la ecuación 4.23 para calcular el desplazamiento angular en ese tiempo.

$$\Delta\theta = \omega\Delta t = 41.7\,\frac{rad}{s} \times 40.0\ minutos \times \frac{60\ s}{1\ minuto} = 1.00\times10^{5}\,rad$$

b) El desplazamiento angular en grados:

Para determinar el desplazamiento angular se utiliza el factor de conversión entre radianes y grados $2\pi rad = 360^{o}$

$$1.00\times10^{5}\,rad \times \frac{360^{o}}{2\pi rad} = 5.73\times10^{6}\,grados$$

c) El desplazamiento angular en revoluciones:

Para determinar el desplazamiento angular en revoluciones se utiliza el factor de conversión entre revoluciones y grados

$$1.00\times10^{5}\,rad \times \frac{1rev}{2\pi rad} = 1.59\times10^{4}\,rev$$

d) La distancia total recorrida por el ciclista en ese tiempo:

La distancia recorrida por el ciclista se puede calcular como la rapidez lineal o tangencial de la periferia de la rueda multiplicada por el tiempo.

$$d = v \times t = 16.7\ m/s \times 2400s = 4.00\times10^{4}\ m$$

4.9 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMEMENTE VARIADO

4.9.1 ACELERACIÓN ANGULAR (α)

La aceleración angular es el cambio de la velocidad angular (ω) con respecto al tiempo. Para ilustrar este movimiento podemos observar en una bicicleta: cuando empezamos a pedalear en un tiempo t_1 las ruedas tienen una velocidad angular ω_1, luego en un tiempo t_2 tienen una velocidad angular ω_2 y por lo tanto experimenta una aceleración angular media denominada α. La aceleración angular media se presenta como α_m. Para aceleración angular constante se usa solamente α.

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ECUACIONES PARA EL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME VARIADO	
$\alpha_m = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}$	(4.24)
$\omega = \omega_0 \pm \alpha t$	(4.25)
$\Delta\theta = \omega_0 t \pm \frac{1}{2}\alpha t^2$	(4.26)
$\omega^2 = \omega_0^2 \pm 2\alpha\,\Delta\theta$	(4.27)

Si una partícula cambia su rapidez angular, aparece una aceleración producida por la variación de la rapidez, la cual se denomina aceleración tangencial.

Se debe tener presente que para este caso la aceleración resultante ya no es radial y está dada por la ecuación:

a) De forma vectorial $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$ (4.28)

donde $\vec{a}$ es la aceleración total; $\vec{a}_c$ la aceleración centrípeta y $\vec{a}_t$ la aceleración tangencial.

b) La magnitud de la aceleración total es: $a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$ (4.29)

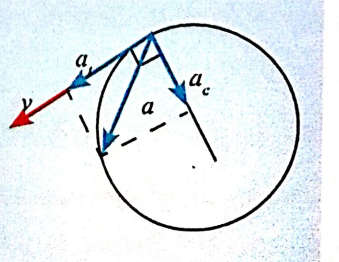


Figura 4.16

4.10 VELOCIDAD RELATIVA

El término movimiento o reposo es relativo a los sistemas de referencia, es decir, una persona (partícula) que viaja en un bus, puede estar en reposo con respecto al bus, si se considera un sistema de referencia en el bus (S'); pero esa misma persona puede estar en movimiento con respecto a otra persona que está en la tierra a orilla de la carretera, es decir, con respecto a un sistema de referencia ubicado en la tierra (S). Es importante indicar que para el entendimiento de velocidad y aceleración relativa deben identificarse tres aspectos importantes, que son: reconocer cuál es la partícula, dónde están los sistemas de referencia S' y S. Decimos que el sistema de referencia S está fijo en la Tierra y que el sistema S' está en movimiento con relación a (S).

Se tienen dos sistemas de referencia S', S y una partícula como se observa en la figura 4.17.

La partícula puede ser: Un insecto, un auto, un pájaro, Superman, etc.

$\vec{r}$ es el vector posición de la partícula con respecto a S.

$\vec{r'}$ es el vector posición de la partícula con respecto a S'.

$\vec{R}$ representa el vector posición del origen del sistema de coordenadas S' con respecto a S.

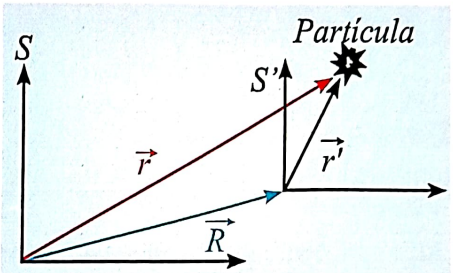


Figura 4.17

Si realizamos la suma de vectores $\vec{r}$, $\vec{r'}$ y $\vec{R}$.

$r = R + r'$ entonces $\Delta r = \Delta r' + \Delta R$ y dividiendo para Δt queda: $\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{\Delta r'}{\Delta t} + \frac{\Delta R}{\Delta t}$

$$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u} \qquad (4.30)$$

donde: **$\vec{u}$ es la velocidad relativa de S' con respecto al sistema de referencia que está fijo en la Tierra (S).**

$\vec{v'}$ es la velocidad de la partícula relativa al sistema de referencia S'.

$\vec{v}$ es la velocidad relativa de la partícula relativa al sistema de referencia que está en la Tierra S.

Una recomendación importante para resolver problemas relacionados con velocidad relativa es identificar donde está S', S y cuál es la partícula.

4.10.1 ACELERACIÓN RELATIVA

Usando la expresión vectorial para la velocidad relativa $\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}$ y considerando que $\vec{u}$ es constante, es decir, la velocidad del sistema S' se mantiene constante, y dividiendo la expresión de la velocidad relativa para el intervalo de tiempo, se tiene:

$$\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v'}}{\Delta t} + \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t}$$

Por lo tanto: $\vec{a} = \vec{a'}$. La aceleración es la misma en el sistema de referencia fijo en la Tierra S así como en el sistema de referencia movible S'. Esto es válido si el sistema de referencia movible S' se mueve con velocidad constante con respecto al sistema de referencia fijo en la Tierra S.

Es decir, la aceleración de la partícula con respecto a S', es la misma aceleración de la partícula con respecto a S, "considerando $\vec{u}$ constante".

Ejemplo 4.7 - Un helicóptero se mueve orientado hacia el Norte con una velocidad de 50.0 *km/h* con respecto al aire. El aire se mueve con una velocidad de 15.0 *km/h* del Este al Oeste. Calcular la velocidad del helicóptero con respecto a un observador que está en reposo en la Tierra. Ver figura 4.18

Solución

$\vec{v'} = 50.0\hat{j}\ km/h$ $\quad \vec{v} = 50.0\hat{j}\ km/h - 15.0\hat{i}\ km/h$

$\vec{u} = -15.0\hat{i}\ km/h$ $\quad \vec{v} = (-15.0\hat{i} + 50.0\hat{j})\ km/h$

$\vec{v} = \vec{v'} + \vec{u}$ $\quad v = 52.2\ km/h$ con $\theta_R = 107°$

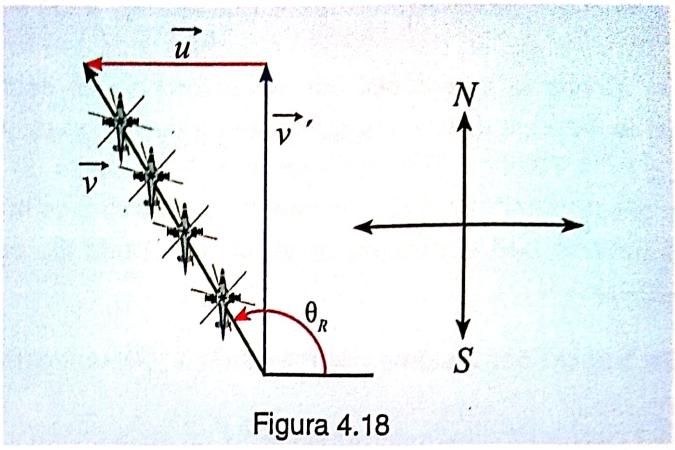


Figura 4.18

Ejemplo 4.8 - Una persona intenta cruzar el río Guayas que fluye a una velocidad de 2.0 *m/s* de Sur a Norte como se indica en la figura 4.19. Si la persona puede nadar a 3.0 *m/s* en aguas tranquilas. Se pide:

a) ¿En qué dirección debe orientarse el nadador para llegar justo a la orilla opuesta frente al punto de partida?

b) ¿Cúal es la velocidad del nadador con respecto a un observador en la tierra?

c) Si el ancho del río Guayas es aproximadamente $5.00\times10^3 m$, determinar el tiempo que tarda el nadador en cruzar el río.

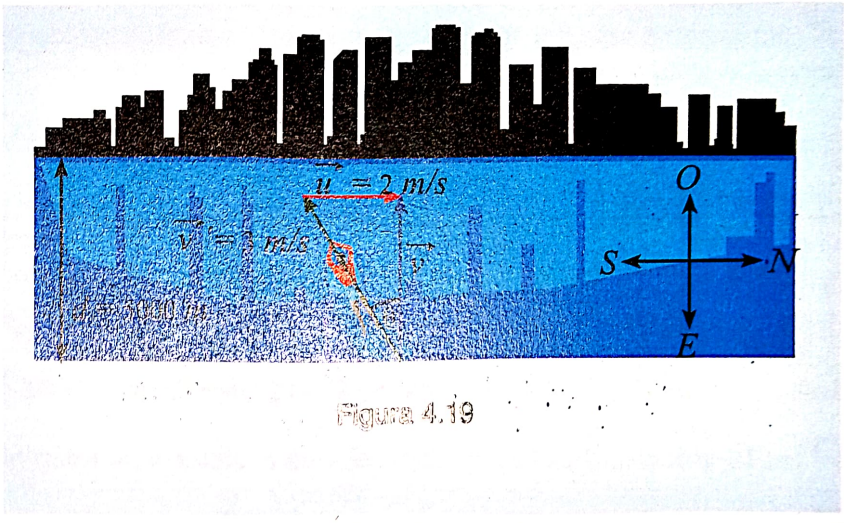


Figura 4.19

Solución:

a) ¿En qué dirección debe orientarse el nadador para llegar justo a la orilla opuesta frente al punto de partida?

Se va a calcular el ángulo θ el cual está formado entre los vectores $\vec{v}$ y $\vec{v'}$

$$sen\ \theta = \frac{u}{v'} = \frac{2.0}{3.0} \rightarrow \theta = 42°$$

b) ¿Cúal es la velocidad del nadador con respecto a un observador en la tierra?

$$v = \sqrt{v'^2 - u^2} = \sqrt{3.0^2 - 2.0^2}\ m/s = 2.2\ m/s$$

c) Si el ancho del río Guayas es aproximadamente $5.00\times10^3 m$, determinar el tiempo que tarda el nadador en cruzar el río.

$d = v \times t$ $\qquad t = \frac{d}{v}$ $\qquad t = \frac{5.00\times10^3 m}{2.2\ m/s}$ $\qquad t = 2.27\times10^3 s$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

TIRO PARABÓLICO

Actividad 4.1

Un bloque es lanzado desde una superficie horizontal lisa con una velocidad como se indica en la figura 4.20. Si el bloque impacta en el piso a $10.0\ m$ de la base, entonces:

a) Calcule el tiempo de vuelo.

b) Calcule la velocidad inicial del bloque.

c) Calcule la velocidad de impacto.

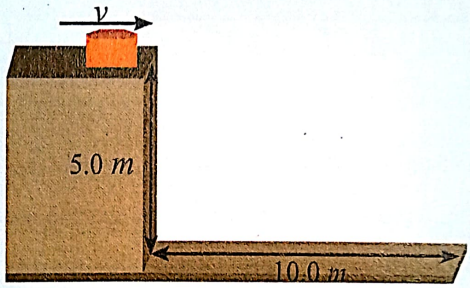


Figura 4.20

Actividad 4.2

Se lanza un proyectil desde la terraza de un edificio de $100.0\ m$ de altura con una velocidad inicial de $8.00\ m/s$ y formando un ángulo de $30.0°$ con la horizontal. El proyectil impacta en un blanco de $60.0\ m$ de altura, como se muestra en la figura 4.21.

a) Calcular el tiempo de vuelo del proyectil hasta impactar en el blanco.

b) Calcular el alcance del proyectil.

c) Calcular la velocidad de impacto del proyectil.

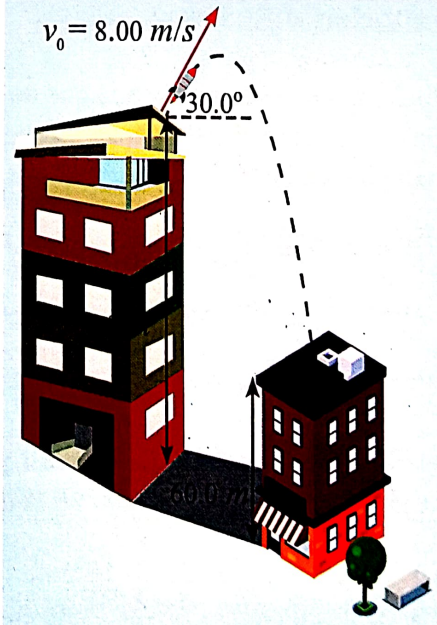


Figura 4.21

Actividad 4.3

Una persona lanza dos proyectiles sobre un piso horizontal. El proyectil A parte con una rapidez inicial v_0 y forma un ángulo θ arriba de la horizontal. El proyectil B parte con una rapidez inicial v_0 y forma un ángulo $(90.0^\circ - \theta)$ arriba de la horizontal. $\theta < 45.0^\circ$. Ver figura 4.22

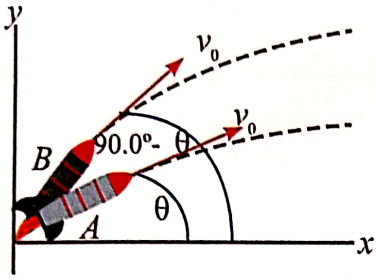


Figura 4.22

Con base en esta información, ¿cuál de las siguientes alternativas es correcta?

a) El proyectil A llega más lejos que el proyectil B.

b) El proyectil A alcanza mayor altura que el proyectil B.

c) El tiempo que los proyectiles permanecen en el aire es el mismo.

d) Los dos proyectiles tienen el mismo alcance horizontal.

e) El proyectil B llega más lejos que el proyectil A.

Actividad 4.4

Un proyectil es lanzado desde lo alto de un edificio con rapidez inicial $v_0 = 20.0\ m/s$ formando un ángulo de 30.0° arriba de la horizontal. Si el proyectil permanece en el aire durante $5.00\ s$ antes de impactar con el suelo. Determinar la altura del edificio. Ver figura 4.23

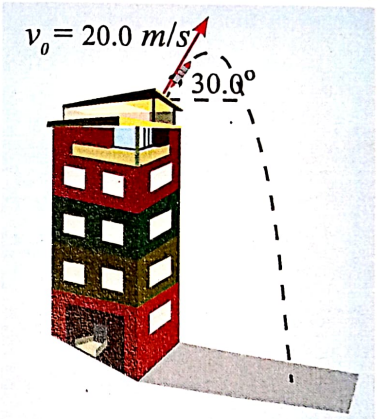


Figura 4.23

Actividad 4.5

Un estudiante del curso nivelatorio que se encuentra en el primer piso alto a $5.0\ m$ de altura sobre el suelo lanza un cuerpo con una velocidad de $10.0\ m/s$ con un ángulo de 30.0° con la horizontal, se pide:

a) Determinar el tiempo de vuelo del cuerpo hasta llegar al suelo.

b) Determinar la velocidad de impacto del cuerpo contra el suelo.

c) Realizar los gráficos v_x versus t y v_y versus t.

d) Realizar los gráficos x versus t y y versus t considerando que el sistema de referencia está en el suelo.

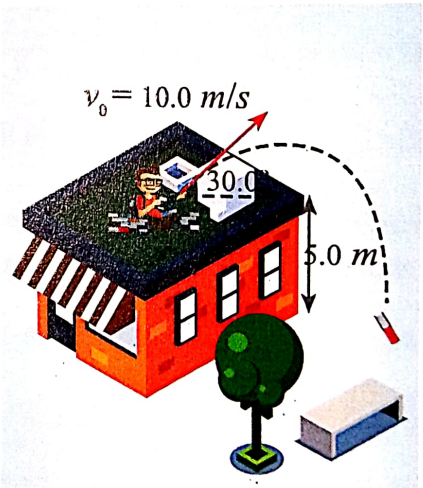
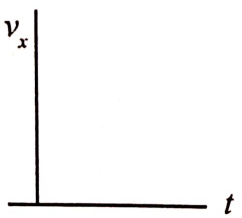
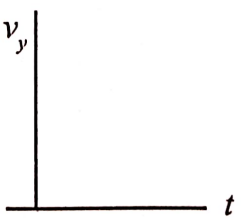
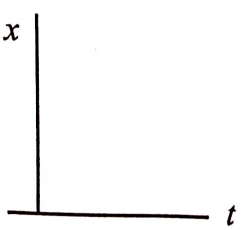
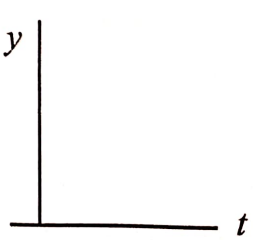


Figura 4.24









Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 4.6

Un globo aerostático sube verticalmente hacia arriba con una rapidez constante de 5.0 *m/s*. Cuando se encuentra a 100.0 *m* de altura con respecto al suelo, una persona que se encuentra dentro del globo, lanza horizontalmente un cuerpo a velocidad de 10.0 *m/s*, se pide:

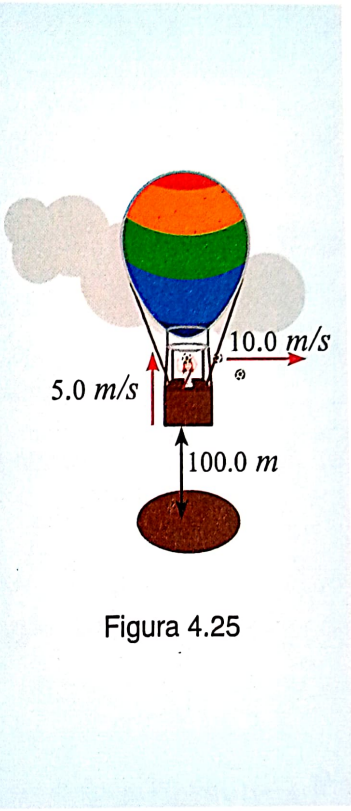


Figura 4.25

a) Determine el tiempo de vuelo.

b) Determine el desplazamiento horizontal del cuerpo.

Actividad 4.7

De las siguientes alternativas propuestas, indique la correcta:

a) Cuando un proyectil llega a su altura máxima su aceleración es cero.

b) Si un proyectil es lanzado verticalmente hacia abajo con gran fuerza, su aceleración es mayor al de la gravedad.

c) Si un proyectil describe un movimiento parabólico, en la parte más alta de su trayectoria su velocidad es diferente de cero.

d) En el tiro parabólico, el movimiento en la dirección horizontal es con aceleración constante diferente de cero.

e) Cuando un proyectil cae desde lo alto de un acantilado, el proyectil llega al suelo con rapidez cero.

Actividad 4.8

Se lanza un proyectil con la misma rapidez inicial v_0 pero a diferentes ángulos con la horizontal θ=30.0°, 45.0° y 60.0° como se muestra en la figura 4.26. Escoja la alternativa correcta.

a) El proyectil lanzado con θ=30.0° alcanza mayor altura máxima.

b) El proyectil lanzado con θ=30.0° alcanza mayor tiempo de vuelo.

c) El proyectil lanzado con θ=30.0° y con θ=60.0° tienen el mismo alcance.

d) El proyectil lanzado con θ=30.0° y con θ=60.0° tienen el mismo tiempo de vuelo.

e) El proyectil lanzado a θ=30.0° y a θ=60.0° tienen la misma altura máxima.

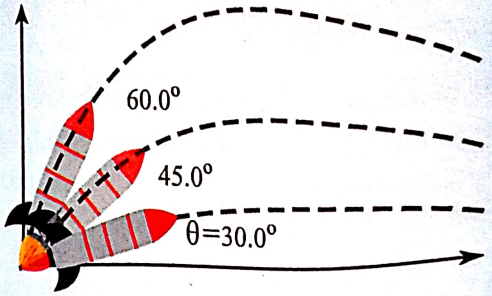


Figura 4.26

Actividad 4.9

Se lanza un proyectil y describe la trayectoria parabólica como se muestra en la figura 4.27.

Grafique como vectores la velocidad y la aceleración del proyectil en los puntos A, B y C.

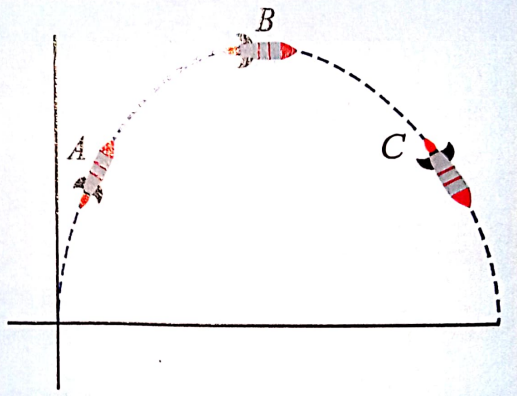


Figura 4.27

Punto A	Punto B	Punto C

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 4.10

Un bloque sale desde el filo de una mesa horizontal con rapidez v_0 y describe un movimiento parabólico hasta impactar el suelo a una distancia x con respecto a la parte baja de la mesa. La mesa tiene una altura h. De las siguientes afirmaciones, escoja la correcta. Ver figura 4.28

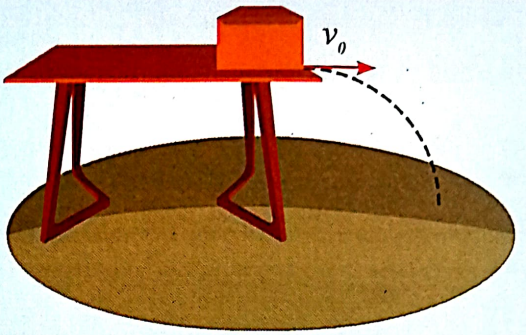


Figura 4.28

a) El tiempo en que el bloque llega al suelo es mayor que si el bloque cayera verticalmente desde el filo de la mesa.

b) Si la velocidad v_0 se duplica el alcance horizontal x se hace 4 veces mayor.

c) Si la altura de la mesa se duplica (se hace $2h$) el tiempo de caída del bloque aumenta en un factor de $\sqrt{2}$.

d) El alcance horizontal no depende de la rapidez v_0.

e) El bloque llega al suelo con rapidez CERO.

Actividad 4.11

Se lanza una pelota con una velocidad inicial v_0 formando un ángulo θ con la horizontal; a los 5.00 segundos del lanzamiento la pelota se encuentra en $x = 40.0\ m$; $y = 10.0\ m$, como se muestra en la figura 4.29.

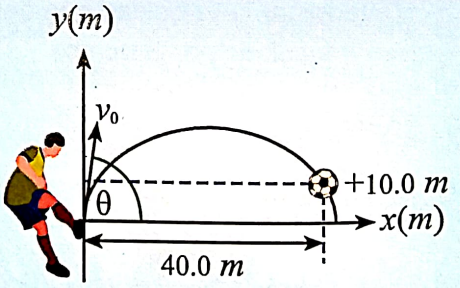


Figura 4.29

a) Determinar la rapidez inicial v_0.

b) Determine el ángulo θ con la horizontal.

Actividad 4.12

Un proyectil es lanzado desde el suelo con una velocidad inicial $v_0 = 100.0\ m/s$ y formando un ángulo de $\theta = 45.0°$ con la horizontal como se muestra en la figura 4.30. Calcule:

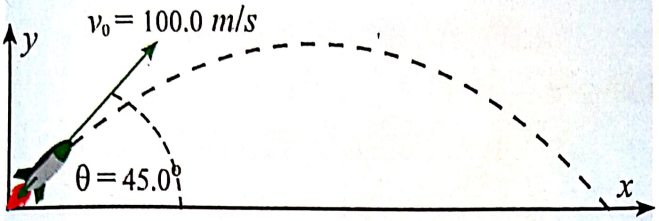


Figura 4.30

a) El alcance máximo.

b) La velocidad del proyectil cuando llega al suelo.

c) El o los tiempos cuando el proyectil tenga una rapidez de $0.90\ v_0$

Actividad 4.13

Un avión que vuela horizontalmente a una velocidad de $3.00\times10^2\ m/s$ y a $3.00\times10^3\ m$ de altura deja caer una bomba justo en el instante que un carro enemigo pasa por un punto situado a $6.00\times10^3\ m$ por delante del punto de lanzamiento. Se pide:

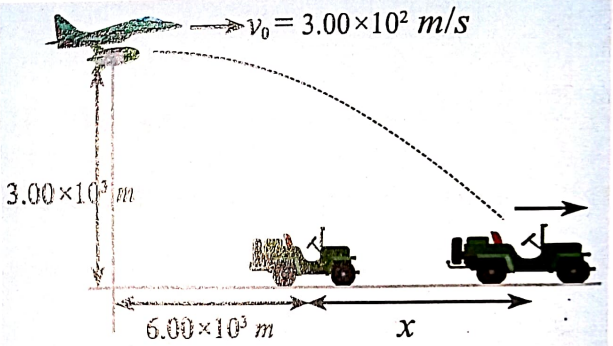


Figura 4.31

a) Determinar la velocidad de impacto del proyectil.

b) Determinar la velocidad que debe tener el auto para ser impactado por la bomba.

Actividad 4.14

Se lanza un cuerpo con una velocidad $v_0 = 30.0\ m/s$ y formando un ángulo de 30.0° con la horizontal. Un edificio se encuentra a $30.0\ m$ del punto de lanzamiento. Se pide:

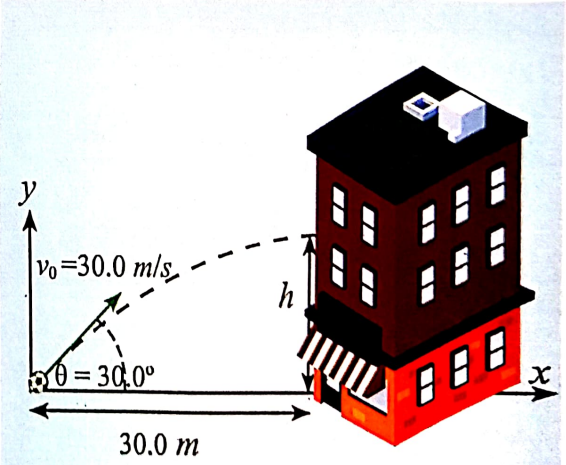


Figura 4.32

a) Determinar a qué altura impacta el cuerpo contra el edificio.

b) Determinar la velocidad de impacto del cuerpo.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 4.15

Dos jugadores de fútbol que están separados una distancia de 40.0 m y se encuentran en una misma línea de acción, patean simultáneamente cada uno un balón. El jugador A patea el balón hacia el jugador B y le proporciona una velocidad inicial de 30.0 m/s con un ángulo de 30.0° respecto al piso en dirección de la línea de acción que une los dos jugadores. Ver figura 4.33

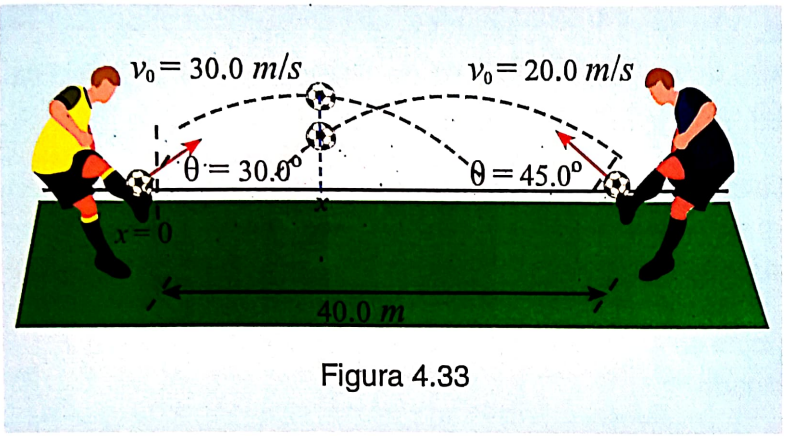


Figura 4.33

Si el jugador B patea otro balón simultáneamente hacia el jugador A con una velocidad de 20.0 m/s y un ángulo de 45.0°. Se pide:

a) Determine en que tiempo se cruzan los balones.

b) Determine la posición donde se cruzan los balones.

c) Determine la distancia de separación de los dos balones en el instante en que se cruzan.

Actividad 4.16

De acuerdo con el gráfico mostrado en la figura 4.34, ¿cuál de las alternativas tendrá mayor altura máxima?

a) v_x=4.0 m/s; v_y=2.0 m/s

b) v_x=5.0 m/s; v_y=1.0 m/s

c) v_x=2.0 m/s; v_y=4.0 m/s

d) v_x=3.0 m/s; v_y=3.0 m/s

e) v_x=1.0 m/s; v_y=5.0 m/s

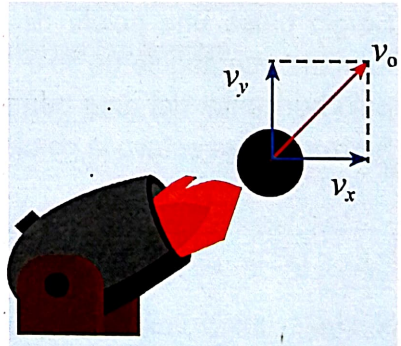


Figura 4.34

Actividad 4.17

De acuerdo con el gráfico mostrado en la figura 4.35, ¿cuál de las alternativas tendrá mayor tiempo de vuelo?

a) v_x=4.0 m/s; v_y=1.0 m/s

b) v_x=3.0 m/s; v_y=2.0 m/s

c) v_x=2.0 m/s; v_y=3.0 m/s

d) v_x=1.0 m/s; v_y=4.0 m/s

e) v_x=1.0 m/s; v_y=7.0 m/s

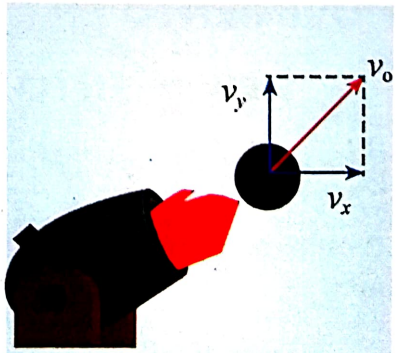


Figura 4.35

Actividad 4.18

De acuerdo con el gráfico mostrado en la figura 4.36, ¿cuál de las alternativas tendrá mayor alcance?

a) $v_x=2.0\ m/s;\ v_y=2.0\ m/s$

b) $v_x=3.0\ m/s;\ v_y=1.0\ m/s$

c) $v_x=2.0\ m/s;\ v_y=4.0\ m/s$

d) $v_x=4.0\ m/s;\ v_y=1.0\ m/s$

e) $v_x=5.0\ m/s;\ v_y=1.0\ m/s$

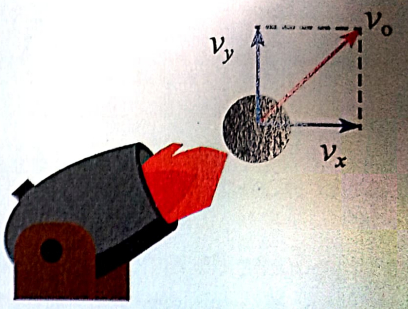


Figura 4.36

Actividad 4.19

Un objeto se lanza desde el punto A, en la parte alta de un plano inclinado con una rapidez inicial de 20.0 m/s y formando un ángulo de 25.0° con respecto a la horizontal.

Si la altura del plano inclinado es de 4.00 m. Determine el tiempo en que el objeto toca la base del plano inclinado.

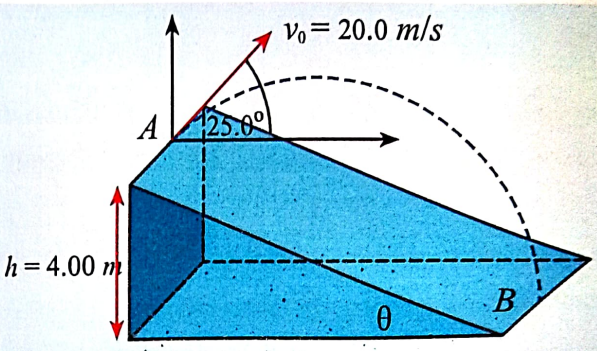


Figura 4.37

Actividad 4.20

Sergio patea una pelota desde el césped con una velocidad inicial de 25.0 m/s formando un ángulo de 50.0° con respecto a la horizontal. Si la pelota golpea en el palo horizontal del arco que se halla a 2.00 m sobre el suelo, Calcule la distancia horizontal que estuvo la pelota en movimiento. Ver figura 4.38

Figura 4.38

MOVIMIENTO EN DOS DIMENSIONES

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME (M.C.U)

Actividad 4.21

Determinar la rapidez angular del minutero de un reloj.

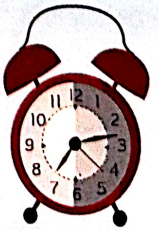


Figura 4.39

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 4.22

Determinar la frecuencia y el período del minutero de un reloj.

Actividad 4.23

Las llantas de un automóvil tienen $60.0\ cm$ de diámetro y las mismas realizan 40.0 revoluciones mientras el automóvil se desplaza a velocidad constante durante $10.0\ s$. Se pide:

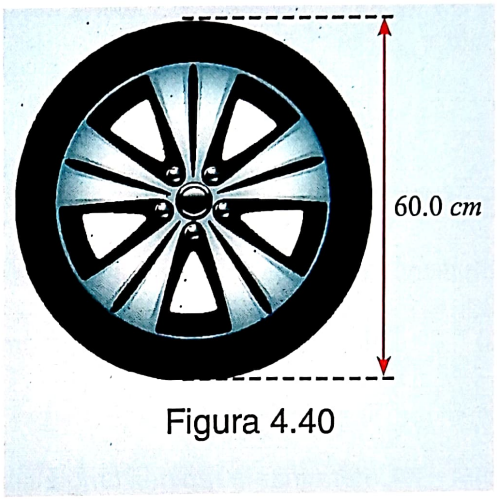


Figura 4.40

a) Determinar el período de rotación de las llantas.

b) La frecuencia de rotación de las llantas.

c) La rapidez angular de las llantas.

d) La rapidez tangencial de un punto de la periferia de las llantas.

e) La magnitud de la aceleración centrípeta de una partícula de la periferia de las ruedas.

Actividad 4.24

La figura 4.41 muestra la rueda moscovita en un parque de diversiones que gira a una rapidez angular constante de $0.209\ \frac{rad}{s}$ y tiene un diámetro de $20.0\ m$. Ver figura 4.41.

Determinar:

a) La frecuencia.

b) El período.

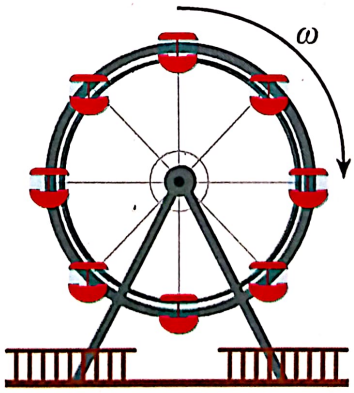


Figura 4.41

c) La rapidez tangencial que una persona experimenta en la rueda moscovita.

d) El tiempo que tarda una persona en dar 20.0 vueltas.

e) La magnitud de la aceleración centrípeta que experimenta una persona en la rueda moscovita.

Actividad 4.25

Un disco compacto CD tiene un radio exterior de $6.0\ cm$ y está girando a $600.0\ RPM$, se pide:

a) Determinar el tiempo que le toma en dar 150.0 vueltas o revoluciones.

b) Determinar la rapidez tangencial de un punto ubicado en la periferia del disco en (m/s).

c) Determinar la magnitud de la aceleración centrípeta de un punto de la periferia del disco en m/s^2.

Actividad 4.26

Un satélite artificial está en órbita alrededor de la Tierra con un período de $5302.0\ s$, a una altitud de $200.0\ km$. El radio de la Tierra es de $6370.0\ km$, se pide:

a) Determinar la rapidez angular del satélite alrededor de la Tierra.

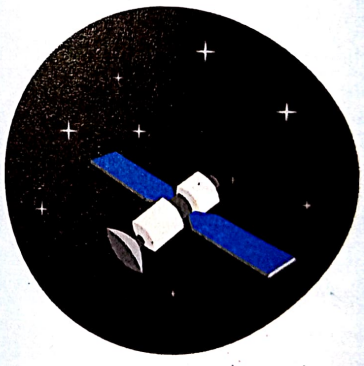


Figura 4.42

b) Determinar la rapidez tangencial del satélite.

c) Determinar magnitud de la aceleración centrípeta que experimenta el satélite.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 4.27

Un engranaje A es impulsado por un motor eléctrico a $1750.0\ RPM$ y este engranaje A transmite movimiento a un engranaje B, como se indica en la figura 4.43.

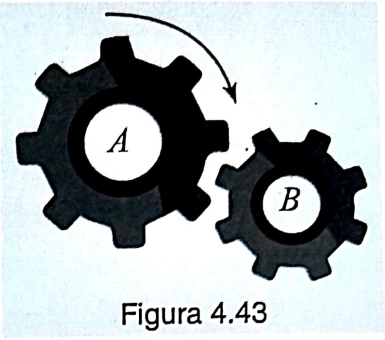


Figura 4.43

Indicar si cada alternativa es verdadera o falsa y escribir su justificación respectiva en cada caso.

a) En el punto de contacto entre los engranajes A y B las rapideces tangenciales son diferentes.

b) El engranaje A tiene mayor rapidez angular que el engranaje B.

c) En el centro del engranaje B, la rapidez lineal es cero.

d) En el centro del engranaje B, la rapidez angular es cero.

e) Una partícula ubicada en la periferia del engranaje A tiene mayor aceleración centrípeta que una partícula ubicada en la periferia del engranaje B.

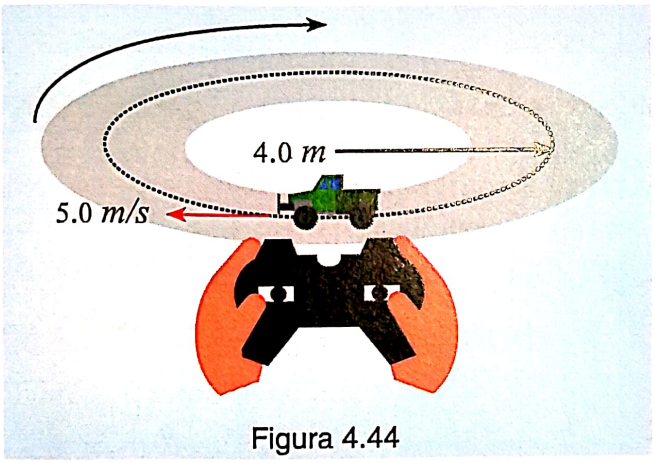


Figura 4.44

Actividad 4.28

Un carrito de juguete a control remoto de masa m describe una trayectoria circular de $4.00\ m$ de radio, con una rapidez constante de $5.00\ m/s$ y se mueve sobre una superficie plana, como se muestra en la figura 4.44.

a) Calcular la frecuencia de rotación del carrito.

b) Calcular la magnitud de la aceleración media del carrito después que ha recorrido un cuarto de vuelta.

c) Calcular la magnitud de la aceleración centrípeta del carrito.

Actividad 4.29

Andrés recorre en línea recta en su bicicleta una distancia de $50.0\ m$ en un tiempo de $20.0\ s$. Sabiendo que Andrés se movió en su bicicleta a rapidez constante y que la rapidez angular de las llantas de la bicicleta es $10.0\ rad/s$, determinar el radio de las llantas de la bicicleta.

Figura 4.45

Actividad 4.30

En una caja de transmisiones de un automóvil se tiene el siguiente sistema de engranajes mostrado en la figura 4.46. El engranaje A rota a $1750.0\ RPM$. Considere que $R_A = 0.10\ m$; $R_B = 0.30\ m$; $R_C = 0.20\ m$

a) Calcular la rapidez tangencial de una partícula ubicada en el punto P en el engranaje C.

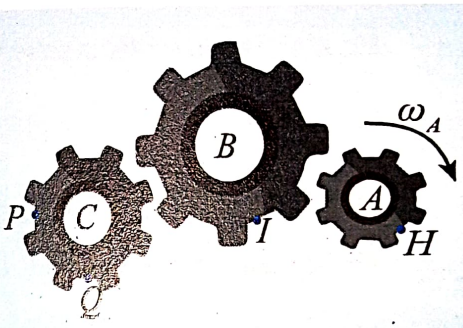


Figura 4.46

b) Calcular la magnitud de la aceleración centrípeta de una partícula ubicada en el punto I.

c) Con relación a la magnitud de la aceleración centrípeta en este problema (figura 4.46) escoja la alternativa correcta.

a) $a_I > a_H = a_Q$

b) $a_I = a_H = a_Q$

c) $a_H > a_Q > a_I$

d) $a_I > a_Q > a_H$

Actividad 4.31

El sistema de transmisión de movimiento consiste en dos poleas A y B, con radios $R_A = 20.0\ cm$ y $R_B = 30.0\ cm$, respectivamente. Se conoce que la polea A se acopla concéntricamente con el eje de un motor eléctrico que gira a $1750.0\ RPM$. Con esta información se pide:

a) Determinar la rapidez angular de la polea B en RPM.

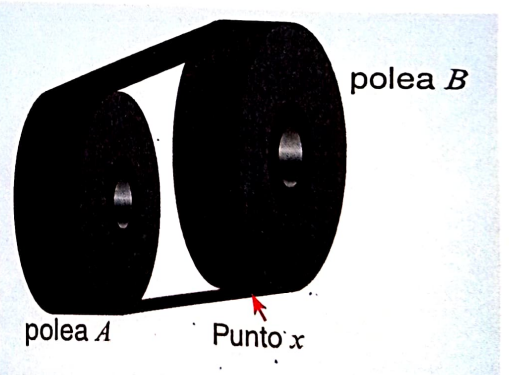


Figura 4.47

b) Determinar la rapidez tangencial de un punto X.

c) Determinar la magnitud de la aceleración centrípeta del punto X.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORMENTE VARIADO (M.C.U.V.)

Actividad 4.32

Un motor de un ventilador se pone en marcha desde el reposo y alcanza una velocidad de $1750.0\ RPM$ en $30.0\ s$, con la información proporcionada, se pide:

a) Determinar la aceleración angular en rad/s^2.

b) Determinar la rapidez angular a los $15.0\ s$.

c) Si el radio de las aspas del ventilador es $0.25\ m$, determine la magnitud de la aceleración de una partícula del aspa ubicada en la periferia de la misma a los $15.0\ s$.

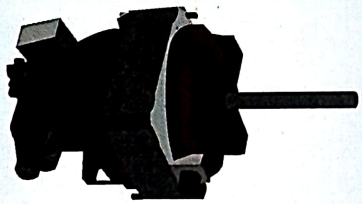


Figura 4.48

Actividad 4.33

Se enciende un ventilador cuyas aspas tienen un radio de $25.0\ cm$ y en un tiempo de $10.0\ s$ el ventilador alcanza una rapidez de $1250.0\ RPM$, con aceleración angular constante. ***A los 10.0 s, se pide:***

a) Determine la rapidez angular en rad/s.

b) Determine la rapidez tangencial de una partícula ubicada en el extremo de las aspas.

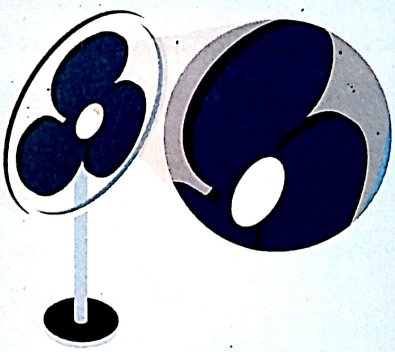


Figura 4.49

c) Determine la magnitud de la aceleración centrípeta de la partícula antes mencionada.

d) Determine la magnitud aceleración tangencial de la partícula.

e) Determine la magnitud de la aceleración total que experimenta la partícula.

Actividad 4.34

Las aspas de un ventilador tienen $20.0\ cm$ de radio y están acopladas a un motor eléctrico que parte del reposo y en $20.0\ s$ alcanza la primera rapidez de $500.0\ RPM$, después de $10.0\ s$ alcanza la segunda rapidez de $1000.0\ RPM$ y finalmente después de $5.0\ s$ alcanza la tercera rapidez de $1750.0\ RPM$, se pide:

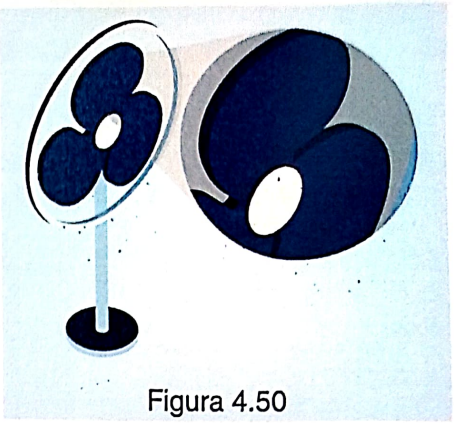


Figura 4.50

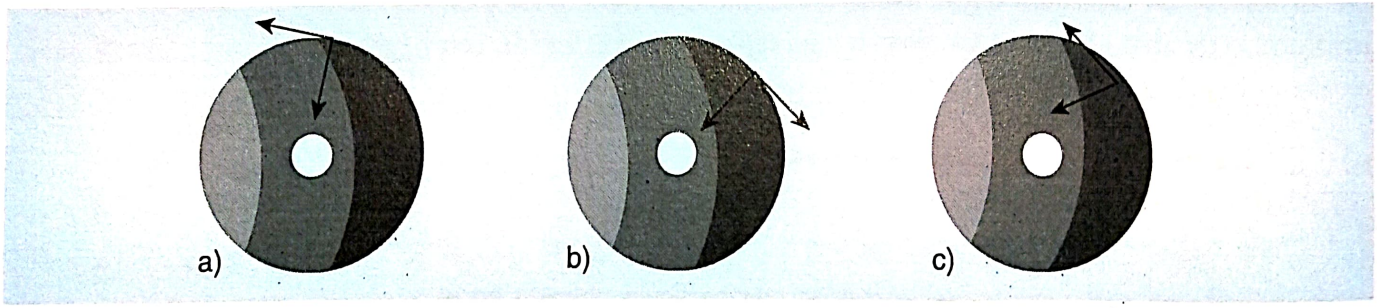
a) Determinar la magnitud de la aceleración angular para cada etapa del ventilador en rad/s^2.

b) Determinar el desplazamiento angular en cada etapa en radianes.

c) Determinar la magnitud de la máxima aceleración centrípeta que experimenta un punto de las aspas del ventilador.

Actividad 4.35

El disco mostrado en la figura está acoplado concéntricamente a un motor eléctrico que está girando a $1250.0\ RPM$, en sentido anti horario. El motor eléctrico se apaga y empieza a disminuir su rapidez angular, escoja la alternativa en la que se indique la velocidad y la aceleración de una partícula que se encuentra en la periferia del disco mientras está disminuyendo la velocidad. ***Explique su respuesta.***



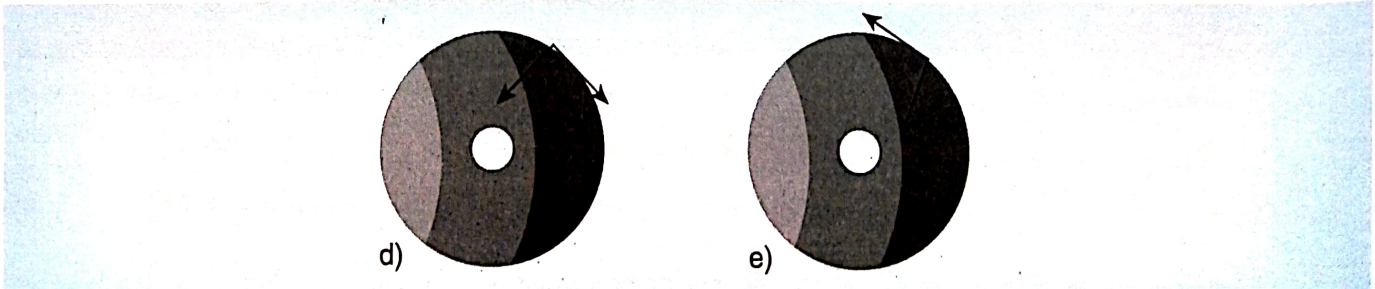


Figura 4.51

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

VELOCIDAD RELATIVA

Actividad 4.36

Un nadador se lanza al río Guayas que fluye a una velocidad de 2.00 m/s de Sur a Norte.

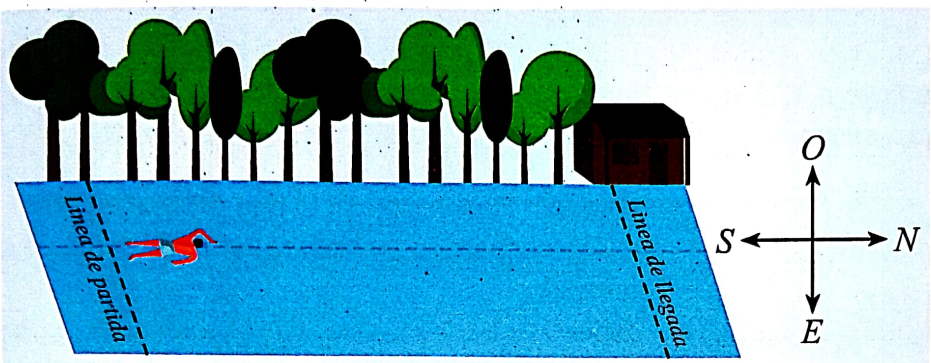


Figura 4.52

Si el deportista puede nadar a 3.00 m/s en aguas tranquilas. Considere la siguiente situación.

Si el nadador decide orientarse a favor de la corriente hasta un pueblo situado a 2000.0 m de distancia y luego regresar al lugar de partida, se pide:

a) Calcular el tiempo que tarda en ir.

b) Calcular el tiempo que tarda en regresar.

c) Calcular el tiempo total que tarda en ir y regresar.

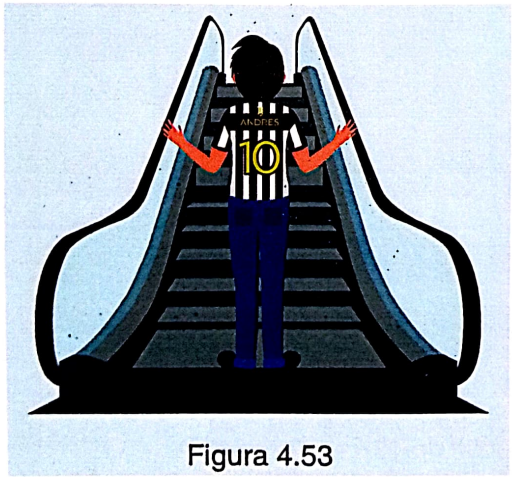


Figura 4.53

Actividad 4.37

Andrés usa una escalera eléctrica en un centro comercial como se indica en la figura 4.53. Con las siguientes observaciones:

1.- Si Andrés usa la escalera eléctrica y sólo se deja llevar por la misma, tarda 30.0 s en llegar al siguiente piso.

2.- Si la escalera eléctrica NO funciona y Andrés camina en la misma, se demora 60.0 s en llegar al siguiente piso.

Con las observaciones mencionadas. Calcular el tiempo que tarda Andrés en llegar al otro piso, si camina sobre la escalera eléctrica y esta, está en funcionamiento.

Actividad 4.38

Un mono viaja en el balde de una camioneta que se mueve a 60.0 *km/h* con respecto a la Tierra en una carretera larga y recta. El mono decide lanzar una banana con una rapidez de 20.0 *km/h* con respecto a la camioneta en dirección opuesta al movimiento de la misma, calcular la velocidad de la banana con respecto a Pedro, que está en la Tierra a orillas de la carretera.

Actividad 4.39

Un nadador intenta cruzar un río que fluye a 4.00 *m/s* de Norte a Sur, sabiendo que el nadador tiene una rapidez de 5.00 *m/s* con respecto al agua, se pide:

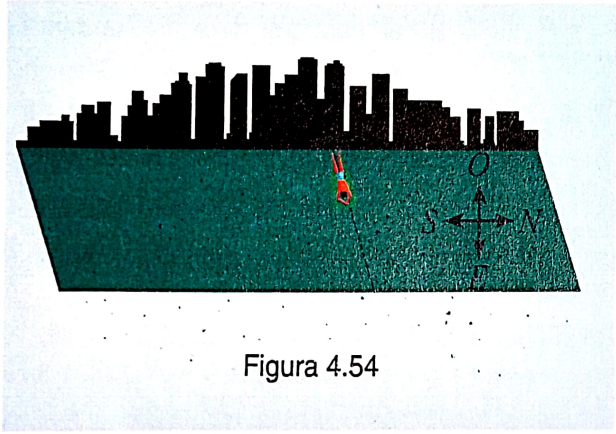


Figura 4.54

a) ¿Calcular la dirección en la que debe orientarse el nadador para llegar justo al frente del punto de partida?

b) Determinar la velocidad del nadador con respecto a un observador en la tierra.

Actividad 4.40

David trata de cruzar el río Daule que fluye a una rapidez u. Andrés lo espera justo al frente del punto de partida de David. David nada a una rapidez de 5.00 *m/s* con respecto al río y tiene que hacerlo con una orientación de 30.0° con respecto a la línea que une a David con Andrés. Se pide:

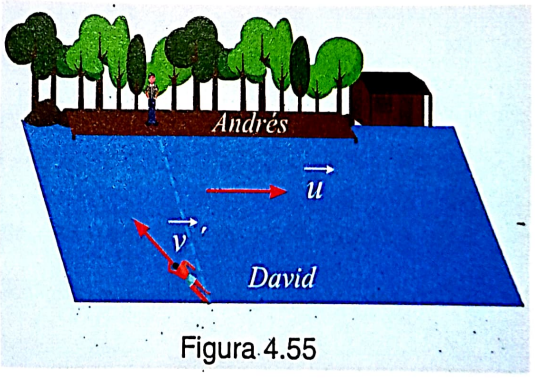


Figura 4.55

a) Calcular la velocidad u, del río.

b) Si David tarda 5.00 minutos en cruzar el río Daule, ¿cuál es el ancho del río?

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 4.41

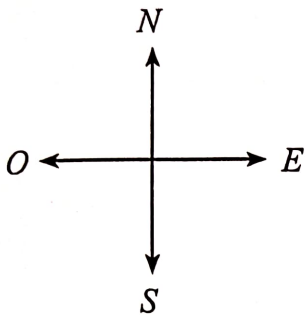


Figura 4.56

Un avión de juguete tiene una rapidez de 20.0 m/s con respecto al aire y desea volar hacia el Sur. Si el avión se mueve en una zona donde la velocidad del viento es 10.0 m/s hacia el Oeste como se indica en la figura 4.56.

a) Determine la dirección a la que se debe orientar el avión para lograr su objetivo.

b) Determine la magnitud de la velocidad con la que el avión se mueve hacia el Sur.

Actividad 4.42

Si en un día lluvioso, las gotas caen verticalmente con una velocidad de 20.0 m/s y David viaja dentro de un taxi que se dirige hacia el Este a una velocidad de 30.0 m/s. Se pide:

Figura 4.57

a) Determinar el ángulo que forman las gotas de agua con respecto a la vertical que observará David en la ventana lateral del taxi.

b) Determinar la rapidez de las gotas de agua con respecto a David que viaja dentro del taxi.

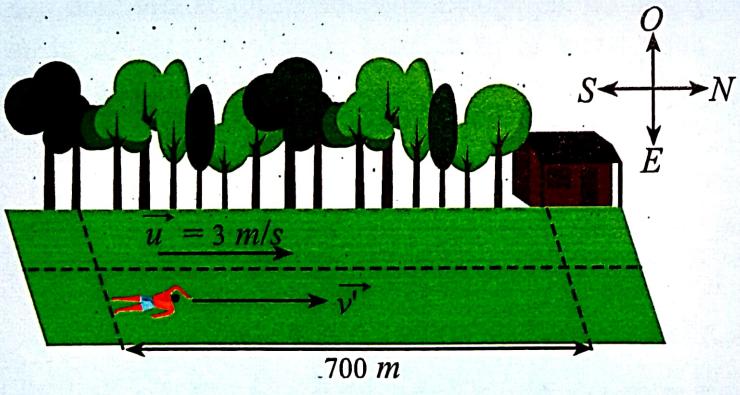


Figura 4.58

Actividad 4.43

En un tramo del río Guayas que fluye de Sur a Norte con una velocidad de 3.00 m/s.

Un nadador se lanza a nadar con una rapidez con respecto al río de v' m/s a favor de la corriente entre dos puntos situados a 700.0 m, tardándose 100.0 s; y, luego decide nadar de regreso con la misma rapidez, tardándose 700.0 s. Se pide:

a) Determinar la rapidez del nadador v'

b) Si el nadador ahora nada a una rapidez de 7.00 m/s, determinar el tiempo total en ir y regresar.

Actividad 4.44

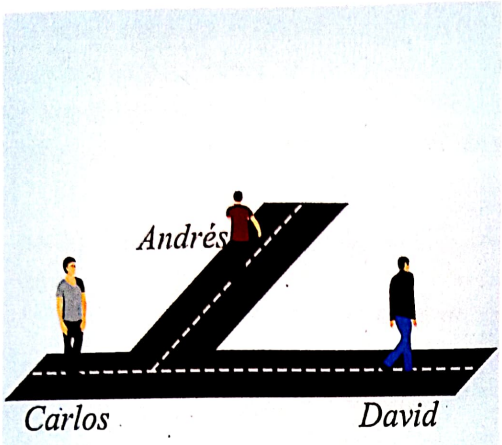


Figura 4.59

Andrés y David pasan simultáneamente por un mismo punto, Carlos el hermano mayor observa que David camina a 3.00 m/s en dirección Este, mientras que Andrés camina a 4.00 m/s en dirección Norte. Se pide:

a) Determinar la velocidad de David con respecto a Andrés.

b) Determinar la velocidad de Andrés con respecto a David.

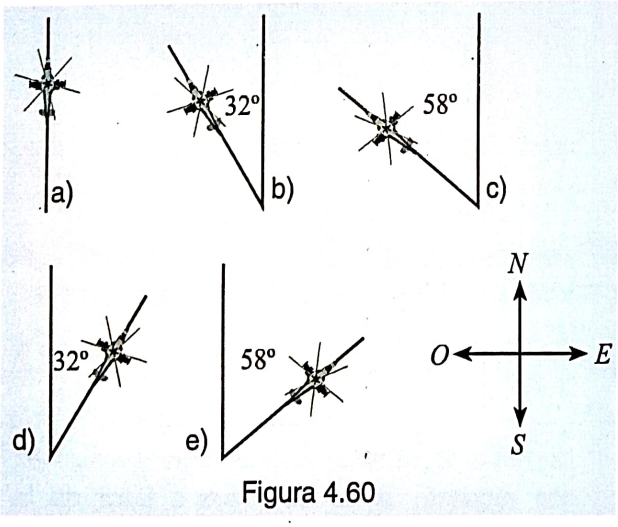


Figura 4.60

Actividad 4.45

El piloto de un avión, que tiene una rapidez de 30 m/s con respecto al aire, desea volar directamente al norte.

¿Cuál de las figuras describe mejor la dirección que debe tomar el piloto para cumplir su objetivo, si se mueve en una región donde un viento sopla de este a oeste con una rapidez de 16 m/s?

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: .....

Paralelo: .....

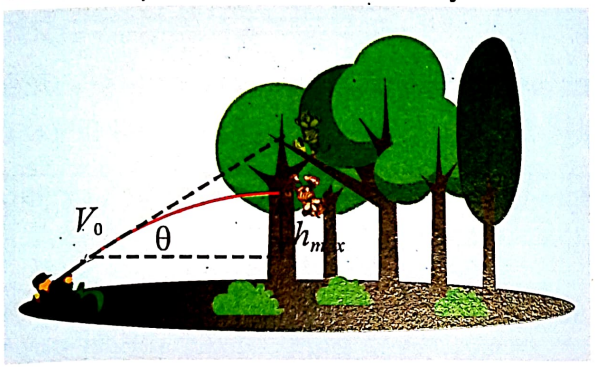
EN LOS PROBLEMAS PROPUESTOS TRABAJAR CON $g = 10\ m/s^2$

4.1 Se lanza una piedra cuya componente horizontal de velocidad es de 5.00 *m/s* y la velocidad forma 30.0° con la horizontal, determine la componente vertical de la velocidad con que la piedra fue lanzada.

a) 10.0 *m/s* b) 5.77 *m/s*

c) 4.33 *m/s* d) 2.89 *m/s*

4.2 Para analizar: A un mono que se encuentra descansado en un árbol se le dispara un dardo tranquilizante con una rapidez inicial de 20.0 *m/s* y una dirección de 60.0° con respecto a la horizontal.



Si se observó que el dardo impactó al mono justamente cuando el dardo alcanzó su altura máxima. Determine, ¿Cuál fue la rapidez con que el dardo impactó al mono?

a) 40.0 *m/s* b) 23.1 *m/s*

c) 17.3 *m/s* d) 10.0 *m/s*

4.3 Para el ejercicio anterior, determinar la altura a la que se encontraba el mono en el árbol medida desde el suelo.

a) 20.0 *m* b) 15.0 *m*

c) 10.0 *m* d) 30.0 *m*

4.4 Se lanzan 2 objetos con idéntica rapidez inicial pero con diferente inclinación, donde θ_1 es la inclinación del objeto 1 y θ_2 es la inclinación del objeto 2. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Nota: considere que θ_1 y θ_2 son menores de 45.0°

a) Si $\theta_1 < \theta_2$, entonces los tiempos de vuelo de $t_1 > t_2$

b) Si $\theta_1 < \theta_2$, entonces las alturas máximas $y_{max1} < y_{max2}$

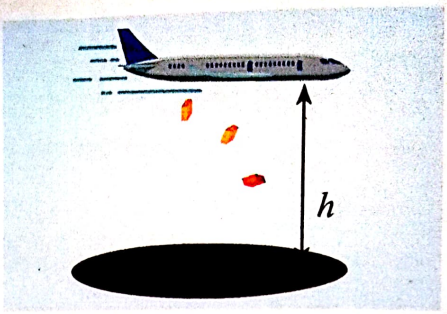
c) Si $\theta_1 < \theta_2$, entonces las rapideces con las que llegan al suelo son $v_1 \neq v_2$

d) Si $\theta_1 < \theta_2$, entonces las rapideces con las que llegan a su altura máxima son $v_1 = v_2$

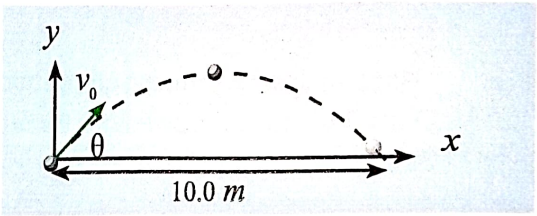
e) Si $\theta_1 < \theta_2$, entonces las aceleraciones en el punto más alto son $a_1 > a_2$.

4.5 Un avión que vuela horizontalmente deja caer una maleta

Determinar la altura a la que vuela el avión si a la maleta le toma $6.00\ s$ pasar por un punto a $10.0\ m$ por arriba del suelo.



4.6 Se lanza una partícula con una inclinación θ con la horizontal. Si el movimiento se realiza sobre un plano horizontal y la partícula tarda $2.00\ s$ en llegar al suelo habiendo recorrido $10.0\ m$, calcule la rapidez inicial con que se lanzó la partícula.

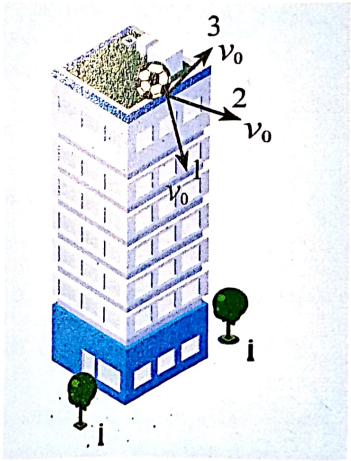


4.7 Se lanza 3 objetos desde la misma altura con diferentes inclinaciones y con la misma rapidez inicial, como puede observarse en el gráfico adjunto.

Determine la relación entre las rapideces con las que llegan al suelo los 3 objetos.

a) $v_1 < v_2 < v_3$ b) $v_1 > v_2 > v_3$

c) $v_1 = v_2 = v_3$ d) $v_1 > v_2 = v_3$



4.8 Para el ejercicio anterior determine la relación del tiempo de vuelo de los 3 objetos.

a) $t_1 < t_2 < t_3$ b) $t_1 > t_2 > t_3$

c) $t_1 = t_2 = t_3$ d) $t_1 > t_2 = t_3$

4.9 Se lanza una partícula con una dirección de $60.0°$ con respecto a la horizontal, si al pasar por un punto por arriba del nivel al que fue lanzado, se observa que su inclinación cambio a $30.0°$ con respecto a la horizontal y su rapidez es de $20.0\ m/s$. Determinar la rapidez con la que fue lanzada la partícula.

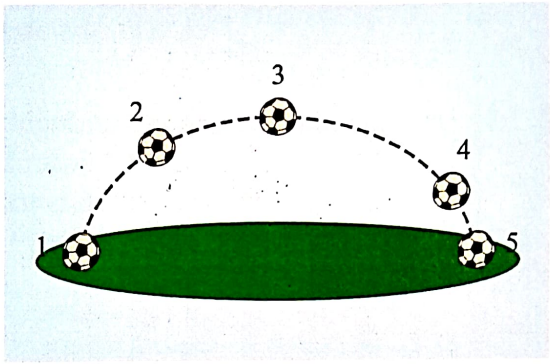
PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: .....

Paralelo: .....

4.10 Del siguiente gráfico adjunto.

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:



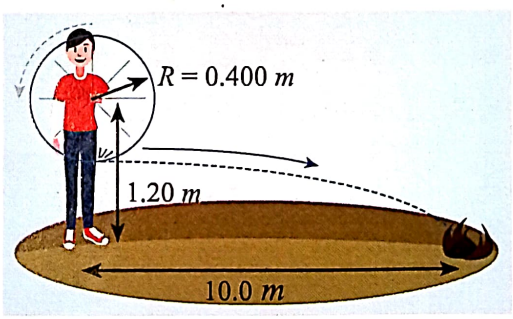
a) $|\vec{v_1}| > |\vec{v_5}|$

b) $v_{x1} > v_{x2} < v_{x3} = v_{x4} < v_{x5}$

c) $|v_{y1}| = |v_{y5}| > |v_{y4}| > |v_{y2}| > |v_{y3}|$

d) $\vec{v_1} = \vec{v_5}$

4.11 Un joven hace girar una piedra atada a una cuerda de $0.400\ m$ en un plano vertical. La mano que sujeta a la cuerda se encuentra a $1.20\ m$ del piso. Si la cuerda se rompe en el punto más bajo de la trayectoria circular y la piedra recorre una distancia horizontal de $10.0\ m$ desde el lugar donde el niño se encuentra parado. ¿Cuál es la rapidez de la piedra en el instante en que se rompió la cuerda?



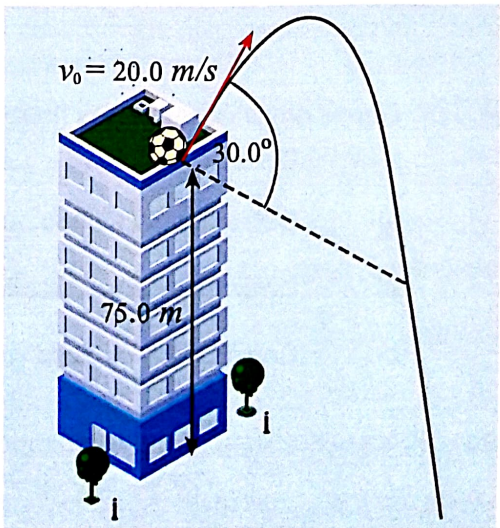
4.12 Se lanza una pelota con una velocidad inicial de $20.0\ m/s$ y formando un ángulo de $30.0°$ con respecto a la horizontal desde la terraza de un edificio de $75.0\ m$ de altura. Determinar el tiempo que tarda la pelota en llegar al suelo.

a) $2.0\ s$

b) $4.0\ s$

c) $3.0\ s$

d) $5.0\ s$

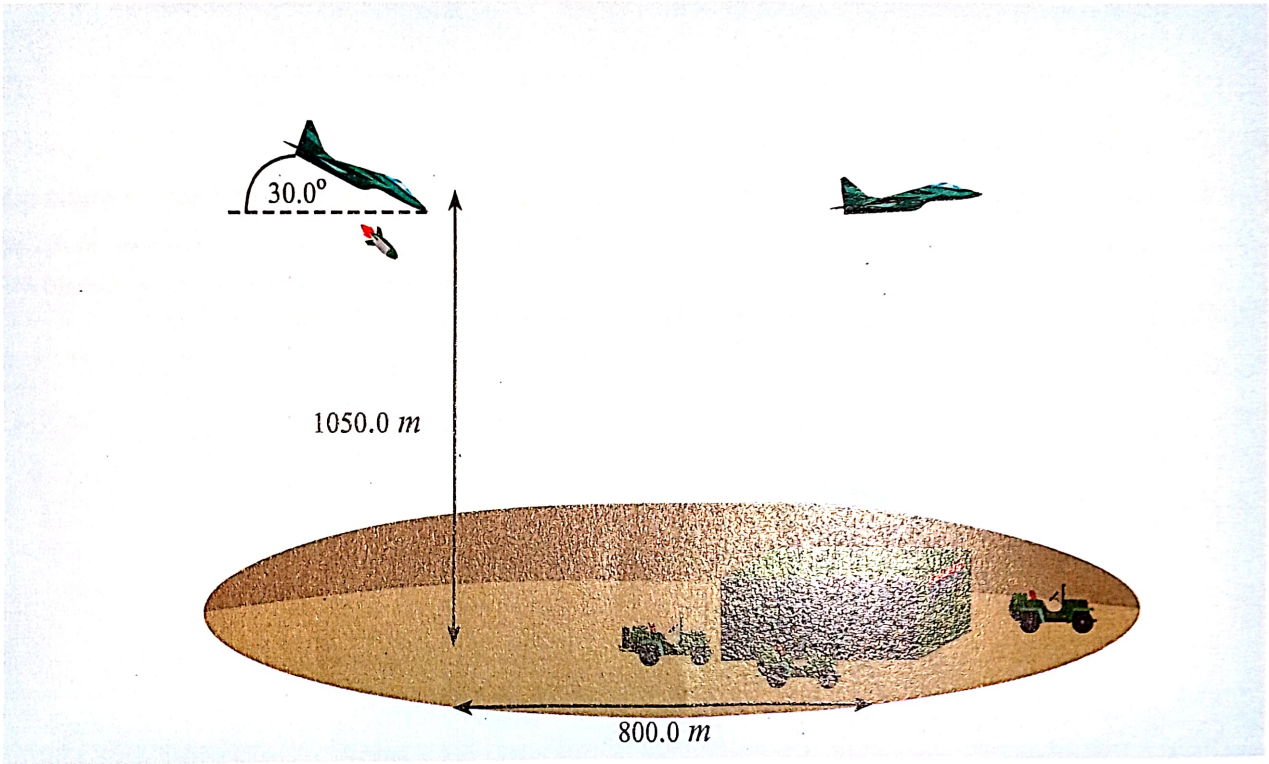


4.13 Un avión moviéndose horizontalmente a 30.0 *m/s*, suelta una maleta de provisiones a unos soldados en tierra. La maleta resiste los impactos sin romperse hasta una rapidez de 70.0 *m/s*. Si un soldado en tierra, mediante pulsaciones en su muñeca, toma el tiempo aproximado en el cual la maleta se mantuvo en el aire y éste es de 6.00 *s*.

a) ¿La maleta sufrirá algún daño cuando impacta con el suelo?

b) ¿Cuál debe ser la altura máxima a la que debe volar el avión respecto al suelo para que no sufra daño la maleta?

4.14 Un avión vuela en picada a un ángulo de 30.0° con respecto a la horizontal con una rapidez de 60.0 *m/s* y deja caer una bomba para destruir una de las bases enemigas. Si al momento de soltar la bomba el avión se encuentra a una distancia horizontal de 800.0 *m* de la base y el avión se encuentra a una altura de 1050.0 *m*. Determinar:



a) Si la bomba impacta con la base enemiga.

b) Si en caso de no hacer impacto con la base, ¿desde que distancia horizontal con respecto a ésta, se debe soltar la bomba para que impacte con ella?

4.15 Desde un avión que vuela horizontalmente a 1000.0 *m* de altura, a una velocidad de 83.0 *m/s*, se deja caer un cuerpo. Se pide:

a) Determinar el tiempo que tarda en impactar el cuerpo con el suelo

b) Determinar la velocidad de impacto

c) Construir los gráficos v_y vs t ; v_x vs t

PROBLEMAS PROPUESTOS

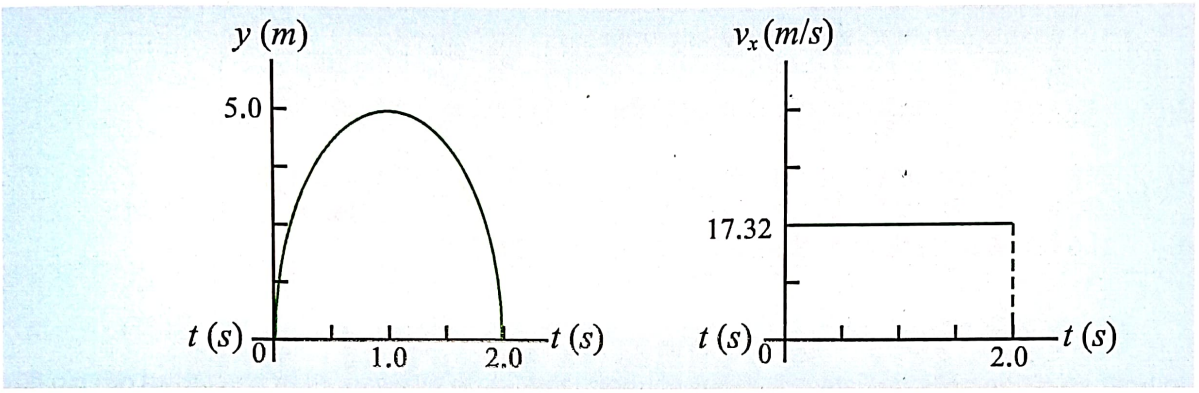
Nombre: ..... Paralelo: .....

4.16 Un cazador lanza una flecha a un blanco que se encuentra a $24.0\ m$ desde el punto de lanzamiento y al mismo nivel. Si la flecha se lanza con una inclinación de 30.0^{o} con respecto a la horizontal, determine:

a) La rapidez inicial necesaria para que la flecha impacte en el blanco.

b) El tiempo que duró el recorrido de la flecha.

4.17 El movimiento de una pelota en el aire se muestra en los siguientes gráficos, se pide:



a) Determinar la velocidad inicial v_0 con que fue lanzada la pelota

b) Determinar el alcance horizontal de la pelota

4.18 Se lanza una canica con rapidez inicial de v_0 y una inclinación de 60.0^{o} con respecto a la horizontal. Si otra canica se lanza con el doble de su rapidez y la mitad de su inclinación, determinar:

a) ¿Cuál de las dos canicas tiene mayor alcance?

b) ¿Cuál es la relación del alcance de la canica 1 con la canica 2?

c) Pueden o no tener las canicas el mismo alcance. En caso de que si se puedan tener, ¿cuál debe ser el ángulo de inclinación de la segunda canica?

d) ¿Cuál de las dos canicas alcanza una mayor altura máxima?

e) ¿Cuál es la relación de las alturas máximas de la canica 1 con la canica 2?

f) Pueden o no tener las canicas la misma altura. En caso de que si se puedan tener, ¿cuál debe ser el ángulo de inclinación de la segunda canica?

4.19 ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación con el que debe ser lanzado un objeto para que la longitud de su altura máxima, sea igual al de la longitud de su desplazamiento horizontal?

4.20 Un CD que gira a 1800.0 *RPM* tiene diámetro de 20.0 *cm*. Se pide:

a) Determinar la frecuencia.

b) Determinar la rapidez angular.

c) El desplazamiento angular hasta los 10.0 *s*.

d) La magnitud de la máxima aceleración centrípeta que puede experimentar un punto del disco.

4.21 Una piedra de afilar herramientas de 30.0 *cm* de diámetro está acoplada concéntricamente con el eje de un motor eléctrico. Si un trabajador enciende el motor, el mismo que parte desde el reposo, a los 10.0 *segundos* alcanza una rapidez angular de 20.0 *rad/s*. En este tiempo, determine:

a) La aceleración angular de la piedra de afilar.

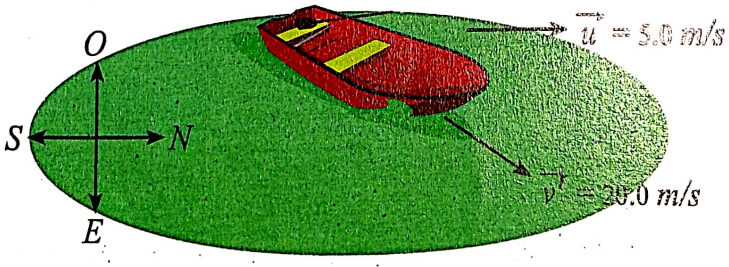
b) El desplazamiento angular de la piedra de afilar

c) La rapidez tangencial de un punto ubicado en la periferia del disco.

d) La magnitud de la aceleración centrípeta de un punto de su periferia

e) La aceleración tangencial de un punto de su periferia

4.22 Un bote se dirige al Nor- Este a 20.0 *m/s* con respecto al río Guayas. Si la velocidad del río Guayas es 5.0 *m/s* de Sur a Norte. Determinar la magnitud de la velocidad del bote con respecto a un observador que está en la orilla del río.



4.23 Desde el filo de una azotea se lanza una piedra P_1 con una rapidez hacia arriba de v_0. Desde el mismo lugar, se lanza otra piedra P_2 con una rapidez hacia abajo de v_0. ¿Qué se puede afirmar acerca de la rapidez con que golpean la Tierra.

a) La piedra que es lanzada hacia abajo golpea la Tierra con mayor rapidez.

b) La piedra que es lanzada hacia arriba golpea la Tierra con menor rapidez.

c) Las dos piedras golpean la Tierra con la misma rapidez.

d) La piedra que es lanzada hacia arriba golpea la Tierra con velocidad CERO.

e) La piedra que es lanzada hacia abajo golpea la Tierra con velocidad CERO.

5 | DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Hasta este momento hemos estudiado cinemática, la parte de la mecánica que se refiere al movimiento sin importar las causas que lo producen. Se ha estudiado el movimiento de una partícula que se desplaza con rapidez constante, o con aceleración uniforme; la caída libre de los cuerpos y el movimiento en general. Nunca nos preguntamos la causa por la qué los objetos se mueven o si están en movimiento, la causa por la qué se detienen. Pero, ¿cuáles son las causas de que ocurra un movimiento?. ¿Por qué los cuerpos se detienen rápidamente o lentamente cuando se deslizan sobre una superficie?. Para responder estas preguntas, es necesario introducir el concepto de fuerza y masa. A esta parte del estudio del movimiento se le denomina DINÁMICA. Se considerará el movimiento de objetos sin considerar sus dimensiones aunque si su masa y a este capítulo se le denominará DINÁMICA DE LA PARTÍCULA.

Se considera el concepto de partícula como un cuerpo de dimensiones despreciables con respecto al entorno aunque tienen una masa definida. Por ejemplo un átomo puede considerarse como una partícula si estamos hablando de un cuerpo macroscópico, un balón de fútbol puede considerarse como una partícula con respecto a una ciudad, la Tierra puede considerarse como una partícula respecto a la Vía Láctea.

Las leyes de Newton del movimiento explican estos conceptos mediante la primera ley de Newton o también llamada Ley de Inercia, en la que se indica que si la fuerza resultante sobre un objeto es cero, este no cambiará su estado de movimiento o de reposo. En la Segunda Ley de Newton se expresa la relación entre la fuerza neta y la aceleración en la que esta última es diferente de cero. En la Tercera Ley de Newton se manifiesta las interacciones entre dos objetos, ya sea que están en contacto o que están a distancia uno de otro.

De forma general estudiaremos dos tipos de fuerzas: aquellas en las que hay contacto y en las que no hay contacto. En la figura 5.1 se muestran tipos de fuerza de contacto.

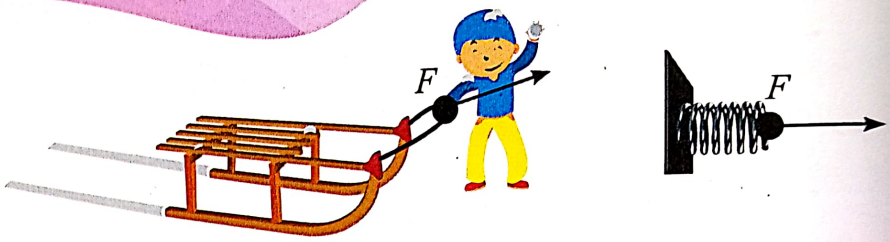


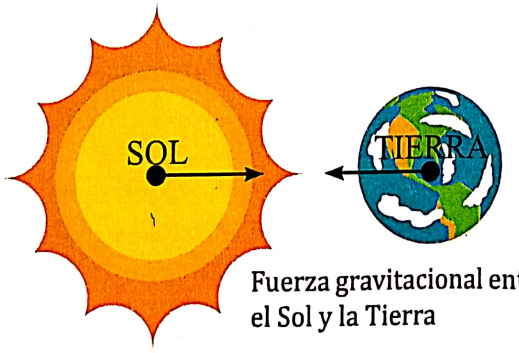
Figura 5.1

Ejemplos de fuerzas a distancia son las fuerzas que existen entre el Sol y los planetas, entre dos cargas eléctricas.

En general, la fuerza gravitacional existe entre dos masas de cualquier tamaño sin importar el tipo de material o la forma.

La fuerza gravitacional viene dada por: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$ donde G es la constante de gravitación universal.

La fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales q_1 y q_2 está dada por: $F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}$ donde k está dada por $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ donde ε_0 es la permitividad del espacio vacío. En la figura 5.2 se muestran las fuerzas de acción a distancia.



Fuerza gravitacional entre el Sol y la Tierra

Fuerza eléctrica entre dos cargas de signo diferente

Figura 5.2

5.1 CONCEPTO DE FUERZA

Con relación a los ejemplos antes mencionados, podemos definir el concepto fuerza como la interacción que existe entre los cuerpos y particulas; y, estas interacciones pueden ser por contacto o a distancia.

5.1.1 FUERZA NETA

Entiéndase por fuerza neta a la sumatoria de fuerzas vectorial de todas las fuérzas que actúan sobre el cuerpo o partícula. $\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F}$

5.1.2 PRIMERA LEY DE NEWTON

Suponga que se lanza un objeto sobre una superficie horizontal. El objeto se moverá cierta distancia y luego se detendrá. Si realizamos el mismo experimento pero esta vez la superficie es completamente lisa (fricción cero), el objeto no tendrá ninguna oposición y por lo tanto se mantendrá moviéndose con velocidad constante hasta que algún objeto en su camino lo detenga o cambie la dirección de su movimiento. Si ahora le aplicamos al objeto una fuerza constante de igual magnitud que la fuerza de fricción entre la superficie y el objeto, este se moverá con velocidad constante o se mantendrá en reposo, ya que la fuerza resultante es cero.

Si luego se aplica una fuerza constante sobre el objeto pero cuya magnitud sea mayor al de la fuerza de fricción entre el objeto y la superficie, entonces existirá una fuerza resultante diferente de cero, y el objeto tendrá aceleración.

Con estos ejemplos se concluye que si sobre un objeto no actúa ninguna fuerza neta, o si la fuerza resultante sobre ese objeto es cero, entonces este se moverá con velocidad constante o se mantendrá en reposo. De esto se desprende la primera ley de Newton. El enunciado de la primera ley de Newton es el siguiente: **"Si la fuerza resultante que actúa sobre un objeto es cero, entonces este estará en movimiento con velocidad constante (línea recta) o se mantendrá en reposo"**

5.2 INERCIA

Si un objeto se encuentra en movimiento, su tendencia es a seguir moviéndose y si uno trata de detenerlo se debería aplicar una fuerza opuesta a su movimiento para detenerlo. Mientras mayor masa tiene el objeto, más difícil será detenerlo o acelerarlo. Lo mismo ocurre si un objeto inicialmente se encuentra en reposo. El objeto presentará resistencia a iniciar el movimiento. La masa es una medida cuantitativa de la inercia. Por ejemplo, un automóvil tiene más inercia que una bicicleta porque la masa del automóvil es mayor. Se define como **inercia a "la propiedad que tienen los cuerpos de resistirse a cambiar su estado de reposo o de movimiento con velocidad constante".**

El siguiente ejemplo muestra el papel de la inercia. Sobre una mesa horizontal coloque una hoja de papel y sobre el papel coloque un objeto.

Figura 5.3

Luego tire fuertemente del papel en dirección horizontal y el objeto ni siquiera se habrá movido. La inercia del objeto trata de mantenerlo en reposo ya que el tiempo en que se aplicó la fuerza fue sumamente pequeño.

En la figura 5.3 Kenneth tirará fuertemente del papel y la botella no se va a mover debido a su inercia. El papel saldrá dejando la botella en el mismo lugar.

Existe otro ejemplo que se encuentra en los lugares de diversiones (figura 5.4). Se trata de empujar un disco sobre una superficie horizontal la cual tiene pequeños agujeros por donde el aire sale hacia arriba.

Figura 5.4

Por lo tanto, entre el disco y la mesa existe una capa de aire por lo que la fricción es despreciable. Cuando la niña empuja el disco, éste se moverá con velocidad constante hasta chocar con el borde que se halla en el extremo opuesto.

La mesa sobre la que se encuentra el disco rojo tiene pequeños agujeros por donde sale aire el cual hace levitar el disco y éste se puede trasladar sobre esta superficie horizontal casi sin fricción. En la foto, Melissa observa el movimiento del disco el cual viaja casi sin fricción.

5.3 SISTEMAS DE REFERENCIA

Cuando una persona está sentada dentro de un bus de pasajeros surge una pregunta: ¿está la persona en reposo o en movimiento? La pregunta es ambigua, ya que la persona está en reposo con respecto al conductor, pero al mismo tiempo está en movimiento con respecto a otra persona parada sobre la carretera; por lo tanto, el reposo y el movimiento son relativos ya que se tiene que especificar si algo está en reposo o en movimiento con respecto a un sistema de referencia.

En este caso, el bus es un sistema de referencia y para este sistema, el pasajero está en reposo; por otro lado, la carretera es otro sistema de referencia y para este sistema, el pasajero está en movimiento.

5.4 SISTEMA DE REFERENCIA INERCIAL Y NO INERCIAL

Se define a un sistema de referencia inercial como aquel que no tiene aceleración. La primera ley de Newton es aplicable solamente a sistemas de referencia inerciales. Se dice que el aula de clase, así como nuestra casa son sistemas de referencia inerciales porque están en reposo (aceleración cero), pero en realidad no lo son porque la Tierra se mueve alrededor del Sol y además gira sobre su propio eje; sin embargo, como la Tierra tarda 365 días en dar una vuelta al Sol y tarda 24 horas en dar una vuelta alrededor de su propio eje, la aceleración es pequeña y este movimiento es casi imperceptible; por lo tanto, el aula de clase o nuestra casa pueden ser considerados sistemas de referencia inerciales.

Un pasajero que viaja en un avión el cual vuela horizontalmente y con velocidad constante, afirmará que su aceleración es cero, lo cual es correcto. El pasajero puede llenar un vaso con agua y a pesar que el avión se mueve a 900 km/h, el agua no se regará; pero, si el avión acelera, frena o gira en cualquier dirección , el agua se regará del vaso. Las leyes de la Física se cumplen por igual en todos los sistemas de referencia inerciales. Cuando un sistema de referencia tiene aceleración (cambio de la velocidad) se dice que es un sistema de referencia no inercial.

La primera ley de Newton no es aplicable en sistemas de referencia no inerciales. De acuerdo a la primera ley de Newton, si un cuerpo se encuentra en reposo o se mueve con velocidad constante estas dos situaciones son equivalentes. Supongamos que estamos volando en un avión que se mueve horizontalmente y con velocidad constante, ningún pasajero del avión notará que se está moviendo, además si alguna persona dentro de la nave realiza un pequeño experimento de lanzar verticalmente una manzana hacia arriba, el tiempo de subida y de bajada de la manzana será igual al tiempo que se mediría en el laboratorio en la Tierra.

Si una persona está sentada en el asiento de un avión, la persona no experimentará ninguna fuerza sobre su espalda realizada por el respaldo del asiento, ya que su movimiento es con velocidad constante; de existir una fuerza neta hacia adelante realizada por el espaldar del asiento sobre la espalda del pasajero, entonces este experimentará aceleración. Este sistema de referencia en el que existe aceleración se denomina sistema de referencia no inercial; así, todo sistema de referencia no inercial tendrá aceleración diferente de cero. Por ejemplo, si viajamos en un carro que está acelerando, sentiremos fuerzas denominadas ficticias que se presentan en los sistemas de referencia no inerciales. Usted debe haber experimentado que cuando un carro acelera los pasajeros tienden a irse hacia atrás y que cuando el carro frena la tendencia es de irse hacia adelante. Como el sistema de referencia (el carro) está acelerado aparecen estas fuerzas ficticias que hace que las personas se muevan hacia atrás o hacia adelante.

En conclusión, la primera ley de Newton implica: $F_{\text{resultante}} = \sum F = 0$

Se deja al lector que indique si los siguientes ejemplos son sistemas de referencia inerciales o no inerciales.

a) Un carro que acelera.

b) Un carro que está virando la esquina.

c) Un carro que está en reposo.

d) Un carro que está bajando por una pendiente con velocidad constante.

e) Una nave espacial que gira alrededor de la Tierra.

f) Un helicóptero que se eleva verticalmente con velocidad constante.

5.5 MASA Y PESO

La masa es la cantidad de materia de un cuerpo o particula, mide su inercia y es una cantidad escalar. La unidad de masa en el sistema internacional de unidades (SI) es el kilogramo (kg).

La masa y el peso son cantidades físicas completamente diferentes; **una diferencia es que la masa es una cantidad escalar y el peso es una cantidad vectorial.** Suponga que un bloque de acero de $0.5\ kg$ que se mueve a una velocidad constante de $1.0\ km/h$ se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción, una persona no tendrá mayor dificultad para detener el movimiento del bloque; si es fácil detener el bloque es debido a que su inercia es pequeña. Si por otro lado, un bloque de acero de $100\ kg$ se mueve con una velocidad constante de $1km/h$, será demasiado difícil que una persona pueda detenerlo debido a que su inercia es grande. Así, la masa es una propiedad que tienen los cuerpos para determinar la inercia que tienen los objetos. Si un cuerpo se encuentra en reposo, será fácil o difícil cambiar su velocidad dependiendo de su inercia: si la masa es grande, su inercia será grande y si la masa es pequeña su inercia será pequeña.

El peso se define como la fuerza de atracción que un planeta ejerce sobre un cuerpo en su superficie su magnitud se puede calcular como: $W = mg$ donde m es la masa y g la aceleración de la gravedad; por lo tanto, el peso es una fuerza dirigida hacia el centro del planeta. Como el peso depende del valor de la aceleración de la gravedad, un objeto de $2.0\ kg$ de masa pesa en la superficie de la Tierra a nivel del mar $w = 2.0\ kg \times 10\ m/s^2 = 20\ N$, donde N es la unidad de fuerza en el Sistema Internacional de Unidades (SI). Ese mismo objeto en la cima de una montaña pesará una cantidad menor a $20\ N$ porque el valor de la aceleración de la gravedad es menor conforme nos alejamos del centro de la Tierra. Aquel objeto de $2.0\ kg$ si lo pesamos en la Luna, pesará $w = 2.0\ kg \times 1.63\ m/s^2 = 3.26\ N$ debido a que la aceleración de la gravedad en la Luna es de aproximadamente $1/6$ del de la Tierra. Es decir, un cuerpo que en la Tierra pesa $20\ N$, en la Luna sólo pesa $3.26\ N$.

Si nos encontramos en algún lugar del Universo muy lejos de cualquier cuerpo celeste, se puede afirmar que la atracción que pueda ejercer algún planeta o estrella sobre un objeto es casi cero, por lo tanto el peso de ese objeto será cero. A pesar de que el peso depende del valor de la aceleración de la gravedad, la masa es constante en todos los sitios del universo independientemente de si está en movimiento o en reposo. La masa no depende del valor de la gravedad. Todo esto es válido a velocidades pequeñas con respecto a la velocidad de la luz. En otros cursos de física se explicará el cambio de la masa cuando la velocidad es cercana a la velocidad de la luz.

Ejemplo 5.1 - Mediante 3 cables se sostiene un bloque de $100\ kg$. Calcule las tensiones en los 3 cables. $cos40° = 0.766$; $sen40° = 0.643$; $sen60° = 0.866$; $cos60° = 0.5$

$\sum F_y = 0$

$T_3 = mg$

$T_3 = 100\ kg \times 10\frac{m}{s^2}$

$T_3 = 1000\ N$

Se observa que el bloque está en reposo, por lo tanto la suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero.

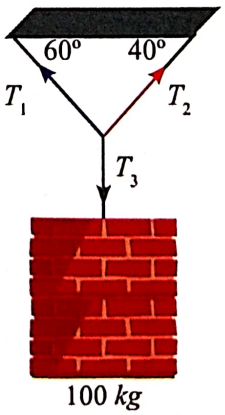


Figura 5.5

Figura 5.6

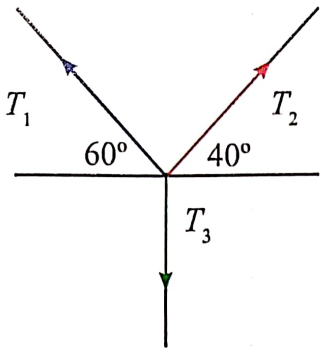


Figura 5.7

$$\sum F_x = T_2\,cos40° - T_1\,cos60° = 0$$

$$T_2 = \frac{T_1\,cos60°}{cos40°} \qquad (5.1)$$

$$\sum F_y = T_1\,sen60° + T_2\,sen40° - T_3 = 0$$

$$T_1\,sen60° + \frac{T_1\,cos60°}{cos40°} \times sen40° = mg$$

$$T_1 = (sen60° + \frac{sen40°}{cos40°} \times cos60°) = mg \rightarrow T_1 = \frac{100\ kg \times 10\ m/s^2}{sen60° + (sen40°/\,cos40°) \times cos60°} \rightarrow T_1 = 777.9\ N$$

Para hallar T_2 se utiliza la ecuación (5.1):

$$T_2 = \frac{T_1 cos60°}{cos40°} = \frac{777.9\ N\ cos60°}{cos40°} \rightarrow T_2 = 507.7N$$

Las tensiones encontradas son: $T_1 = 777.9N$; $T_2 = 507.7N$; $T_3 = 1000N$

El ejemplo anterior se puede resolver por un método más rápido aplicando el siguiente concepto: "si tres vectores mantienen en equilibrio a un cuerpo, esas fuerzas tienen que formar un triángulo". El lector puede comprobar los ángulos internos del triángulo de la figura 5.8.

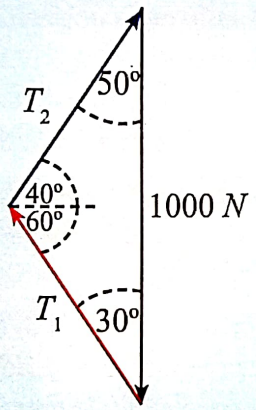


Figura 5.8

Aplicando la ley del seno:

$$\frac{1000\ N}{sen100°} = \frac{T_1}{sen50°} \qquad T_1 = 777.9\ N$$

$$\frac{1000\ N}{sen100°} = \frac{T_2}{sen30°} \qquad T_2 = 507.7\ N$$

Como puede apreciar el lector, este método es muy sencillo pero solo es válido cuando 3 vectores mantienen en equilibrio a un cuerpo. Si existiera una cuarta cuerda, el método del triángulo no sería válido y tendría que resolverlos por el método de las componentes.

5.6 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Cuando una persona empuja un bloque de masa m, el cual se encuentra sobre una superficie horizontal sin fricción, el bloque se desliza con una aceleración a; si la fuerza que ejerce la persona se duplica, el bloque se deslizará con el doble de la aceleración, esto es: $2a$. Se observa que para aumentar la aceleración de a a $2a$ se requiere duplicar la fuerza. Si la masa del bloque aumenta, la fuerza también debe aumentar; es decir, se hace más difícil tratar de aumentar la aceleración del bloque; por lo tanto, se dice que es la inercia la que impide acelerar el bloque, así que a mayor masa se tiene mayor inercia. Si un objeto de masa m_1 adquiere una aceleración a_1 al aplicarle una fuerza F, y un objeto de masa m_2 adquiere una aceleración a_2 al aplicarle la misma fuerza F, implica que se cumple la relación:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \qquad (5.2)$$

La ecuación 5.2 indica que existe una relación inversa entre las masas y las aceleraciones bajo la aplicación de una misma fuerza $\vec{F}$.

Vale la pena describir la unidad de fuerza en el SI. El Newton (N) se define como:

$$1\,N = 1\,kg\,\frac{m}{s^2} \qquad (5.3)$$

En palabras: el **Newton es la fuerza que se le debe aplicar a una masa de $1kg$ para que se acelere a $1\frac{m}{s^2}$.**

En el estudio de la primera ley de Newton se usó el hecho de que la sumatoria de las fuerzas o la fuerza neta es igual a cero, esto implicaba objetos moviéndose en línea recta y con velocidad constante (esta velocidad puede ser cero). Ahora supondremos que la fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es diferente de cero. Se observa entonces que el cuerpo va a tener aceleración y se cumple que la dirección de la fuerza neta es la misma que la de la aceleración; también se observa que si la fuerza se duplica, la aceleración también se duplica y que si la fuerza se triplica la aceleración también se triplica. Esto se cumple si la masa del cuerpo se mantiene constante.

Para llegar a la relación entre la fuerza, la masa y la aceleración, Newton definió el término conocido como **momentum o cantidad de movimiento lineal** $\vec{p}$.

Se define el vector $\vec{p}$, llamado momentum o cantidad de movimiento, como el producto $m\vec{v}$ donde m es la masa y $\vec{v}$ es la velocidad.

$$\vec{p} = (m\vec{v}) \qquad (5.4)$$

Se define fuerza como la rapidez de variación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}$$

Si la masa es constante: $\vec{F} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ y reconociendo que $\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ es la aceleración de la partícula se tiene:

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (5.5)$$

La cual se conoce como **segunda ley de Newton**

Como sobre una partícula pueden estar actuando varias fuerzas, $\vec{F}$ representa la fuerza neta o la fuerza resultante, es decir la suma vectorial de todas las fuerzas que actuan sobre el cuerpo o partícula.

$\sum\vec{F} = m\vec{a}$ **donde la sumatoria de fuerzas representa la fuerza neta.**

$$\sum F_x = ma_x \qquad \sum F_y = ma_y \qquad \sum F_z = ma_z \qquad (5.6)$$

Ejemplo 5.2 - Un bloque de $10.0\ kg$ de masa es arrastrado horizontalmente hacia la derecha sobre una superficie sin rozamiento mediante una fuerza de $20.0N$ que forma un ángulo de $60°$ con la horizontal. Calcule la aceleración del bloque. $cos60° = 0.5$

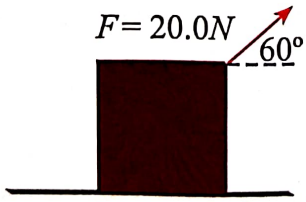


Figura 5.9

La fuerza que produce una aceleración hacia la derecha es la componente de la fuerza en dirección $+x$.

La componente en x es:

$F_x = 20.0Ncos60° = 10.0N$

$$\sum F_x = ma_x \qquad a_x = \frac{\sum F_x}{m} \qquad a_x = \frac{10.0N}{10.0\ kg} \qquad a_x = 1\ m/s^2 \qquad a_y = 0$$

Esta es la aceleración total del bloque ya que $a_y = 0$.

Ejemplo 5.3 - Suponga que un bloque que se mueve en la dirección positiva del eje de las x y va disminuyendo su velocidad paulatinamente hasta detenerse, ¿qué se puede deducir acerca de la fuerza neta en este movimiento?

Solución:

Para que su velocidad disminuya, debe existir una aceleración ($\vec{a}$) en dirección opuesta. Esto quiere decir que la fuerza resultante que actúa sobre el bloque tiene una dirección opuesta a la del movimiento. Esta fuerza podría ser la fricción que estaría dirigida hacia la izquierda.

Ejemplo 5.4 - Calcule la magnitud y dirección de la fuerza resultante al aplicar al disco las fuerzas F y Q mostradas en la figura 5.10. Suponga que el disco se mueve sobre una superficie horizontal y sin fricción y que el ángulo θ es igual a 60°. Luego calcule magnitud y dirección de la aceleración si la masa del disco es de 2.0 kg. $sen60° = 0.866$; $\cos 60° = 0.5$

Aplicando la descomposición rectangular:

$$\sum F_y = Q sen\theta = 8.0N \times sen60°$$

$$\sum F_y = 6.9N$$

$$\sum Fx = Q\cos\theta + F = 8.0N\, cos60° + 10.0N = 14.0N$$

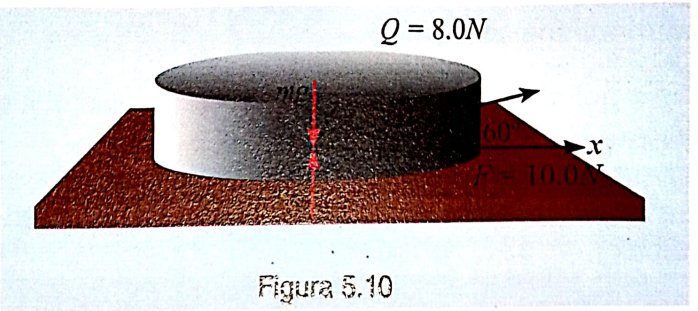


Figura 5.10

$$Fresult = \sqrt{(14.0N)^2 + (6.9N)^2} = 15.6\ N$$

Para calcular la aceleración resultante, se puede calcular a_x y luego a_y.

Sumatoria de fuerzas en x es igual al producto de la masa por la aceleración en x.

$$14.0N = 2.0kg \times a_x \qquad a_x = \frac{14.0N}{2.0kg} = 7.0\ \frac{m}{s^2}$$

De la misma manera, se puede calcular la aceleración en y mediante la sumatoria de fuerzas en y e igualando al producto de la masa por la aceleración a_y.

$$6.9N = 2.0kg \times a_y \qquad a_y = \frac{6.9N}{2.0kg} = 3.45\ \frac{m}{s^2}$$

Por lo tanto, la aceleración resultante es:

$$a_{resul} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \qquad (5.7)$$

$$a_{resul} = \sqrt{\left(7.0\frac{m}{s^2}\right)^2 + \left(3.45\ \frac{m}{s^2}\right)^2} = 7.8\ \frac{m}{s^2}$$

Una vez que se ha calculado la fuerza resultante, es posible, a través de este resultado, calcular la aceleración resultante de una manera más rápida. El valor que obtuvimos de la fuerza resultante fue de 15.6 N:

$$15.6N = 2.0kg \times a_{resul} \qquad a_{resul} = \frac{15.6\ N}{2.0kg} \qquad a_{resul} = 7.8\ \frac{m}{s^2}$$

Se observa que el resultado es exactamente el mismo.

La aceleración resultante y la fuerza resultante siempre tendrán la misma dirección. Sin embargo es incorrecto afirmar que la velocidad de la partícula tiene la misma dirección que la fuerza resultante o aceleración resultante.

$$\alpha = tan\text{-}\ 1\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = tan\text{-}\ 1\left(\frac{3.45}{7.0}\right) = 26.2° \qquad \alpha = tan\text{-}\ 1\left(\frac{\sum F_y}{\sum F_x}\right) = tan\text{-}\ 1\left(\frac{6.9}{14.0}\right) = 26.2°$$

Se observa que el resultado obtenido es el mismo.

Ejemplo 5.5 - De acuerdo al ejemplo 5.4 se encontró que la fuerza resultante sobre el disco fue de $15.6N$. Si el disco es reemplazado por otro de $20.0\ kg$, ¿cuál sería su aceleración?

$$\sum F_x = ma_x \qquad a_x = \frac{\sum F_x}{m} \qquad a_x = \frac{15.6N}{20.0\ kg} \qquad a_x = 0.780\ \frac{m}{s^2}$$

La cual es 10 veces menor a la aceleración encontrada en el ejemplo 5.4.

5.7 TERCERA LEY DE NEWTON

El enunciado de la tercera ley de Newton o Ley de Acción y Reacción es el siguiente: "Si un cuerpo A ejerce una fuerza sobre otro cuerpo B éste ejercerá una fuerza sobre el cuerpo A de igual magnitud y dirección opuesta".

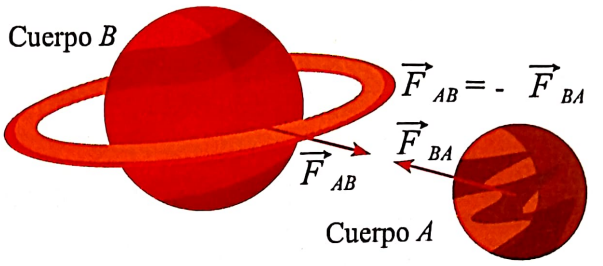


Figura 5.11

Si una persona trata de empujar una pared con una fuerza $\vec{F}$, la pared ejercerá sobre la persona una fuerza $-\ \vec{F}$. Al introducir el signo menos implica que su dirección es opuesta.

Si el cuerpo A de la figura 5.11 ejerce una fuerza sobre el cuerpo $B(F_{AB})$, tambien el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo $A(F_{BA})$; estas dos fuerzas son de igual magnitud y dirección opuesta.

En el caso de la atracción de masas de acuerdo a la ley de gravitación universal, es bien conocido que si la Tierra atrae a la Luna, ésta atrae a la Tierra con fuerzas que son de igual magnitud y dirección opuesta. Entonces surge la pregunta: ¿Por qué la Luna no ha chocado con la Tierra?. Se deja al lector analizar esta pregunta.

Se debe tener en cuenta que las fuerzas de acción y de reacción nunca actúan sobre el mismo cuerpo; es decir, este par de fuerzas no pueden mantener en reposo a un objeto.

$$\sum F_y = 0$$

$$N - mg = 0$$

$$N = m\,g$$

En la figura 5.12 (a) se muestra un diagrama de fuerzas entre una mesa y una caja que se encuentra sobre ella.

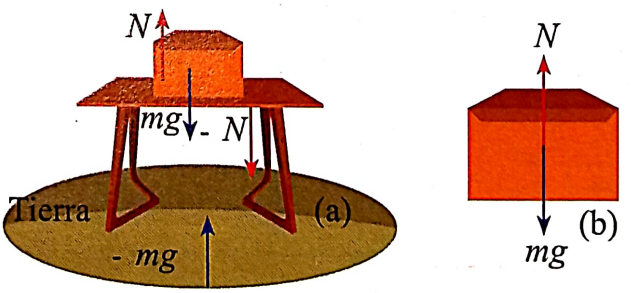


Figura 5.12

La Tierra atrae a la caja con una fuerza que es igual a su peso mg (acción) y por lo tanto la caja atrae a la Tierra con una fuerza $-\ mg$ (reacción). Por otro lado, la mesa empuja a la caja con una fuerza N (acción) y la caja ejerce una fuerza sobre la mesa $-N$. Los vectores de igual color son un par acción – reacción. En la figura 5.12 (b) se puede observar que las fuerzas que actúan sobre la caja son de diferente color, por lo tanto ellas no representan un par acción- reacción.

5.8 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

Es un diagrama en el que se representan todas las fuerzas que los otros cuerpos con los que interactúan, ejercen sobre el cuerpo, cuyo diagrama de cuerpo libre se está realizando. Se llama así porque no se toma en cuenta las dimensiones del cuerpo y se asume que las fuerzas actuan en el centro de masa.

Por ejemplo: en la figura 5.12 (b), la caja interactúa con la mesa y con la Tierra; por lo que la mesa es responsable de que sobre la caja aparezca una fuerza normal (N) dirigida hacia arriba; la interacción con la Tierra genera una fuerza de atracción sobre la caja denominada peso (mg) y que está dirigida hacia abajo. Por lo tanto, sobre la caja solo actúan dos fuerzas, las mismas que no son un par acción- reacción. Ademas, al estar la caja en reposo, la normal debe ser igual al peso, de modo que la suma de todas las fuerzas sea igual a cero.

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UNA CAJA HALADA POR UNA FUERZA

En la figura 5.13 (a) se muestra un bloque de masa m que es arrastrado por una fuerza $\vec{F}$ sobre una superficie horizontal sin fricción. En la figura 5.13 (b) se han graficado todas las fuerzas que interactúan con el bloque.

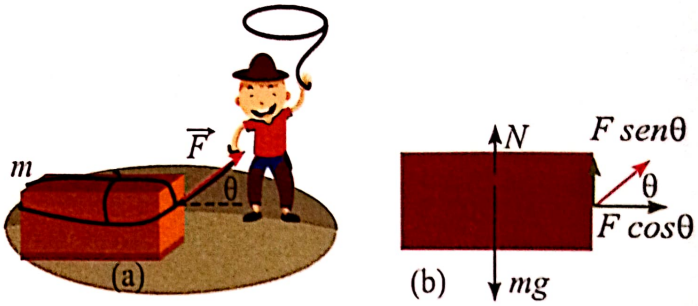


Figura 5.13

Por ejemplo: la fuerza mg es aquella que la Tierra ejerce sobre el bloque; la normal N, es la fuerza que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque, sosteniéndolo; la fuerza F ha sido descompuesta en sus dos componentes ortogonales, esto es en $Fcos\theta$ y $Fsen\theta$.

Observe que todas las fuerzas tienen direcciones a lo largo del eje de las x o a lo largo del eje de las y. Ya que el bloque no se mueve verticalmente, implica que la sumatoria de todas las fuerzas que actúan a lo largo del eje de las y debe ser igual a cero. $\sum F_y = 0$ $\quad N + Fsen\theta - mg = 0$

La fuerzas N y $Fsen\theta$ están dirigidas hacia arriba por lo tanto tienen signo positivo, mientras que la fuerza mg está dirigida hacia abajo: y tiene signo negativo. A lo largo del eje de las x solo existe una fuerza dirigida hacia la derecha, esto implica que esa fuerza va a provocar una aceleración sobre el bloque. Como la fuerza resultante sobre el eje de las x está dirigida hacia la derecha, la aceleración también estará dirigida hacia la derecha; de hecho, la fuerza resultante es igual a $Fcos\theta$. De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = m\,a \qquad F\cos\theta = m\,a \qquad a = \frac{F\cos\theta}{m}$$

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN BLOQUE EMPUJADO POR UNA FUERZA

Realice el diagrama de cuerpo libre del cuerpo mostrado en la figura. Descomponga las fuerzas en componentes a lo largo de los ejes x y y.

Se ha graficado las fuerzas que realizan los cuerpos con los que interactúa el bloque; este interactúa con la Tierra, con la superficie horizontal y con la fuerza F, La fuerza F es descompuesta en sus componentes ortogonales $Fsen60^o$ y $Fcos60^o$.

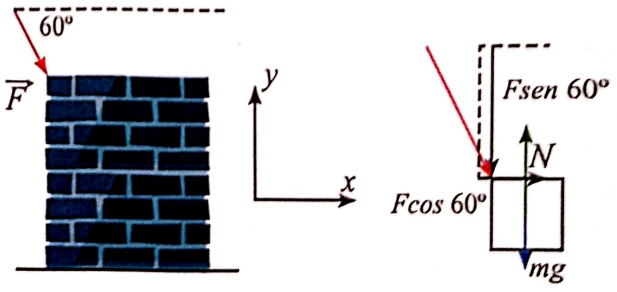


Figura 5.14

Debido a la interacción con la Tierra se tiene la fuerza mg dirigida verticalmente hacia abajo, la normal es la reacción que la superficie horizontal ejerce sobre el bloque. Observe que las fuerzas que se grafican en el diagrama de cuerpo libre son todas aquellas que actúan sobre el bloque, nunca se deben graficar las fuerzas que el bloque ejerce sobre su entorno. **Si la fuerza aplicada $\vec{F}$ es igual a 20.0 N y la masa es igual a 5.0 kg, se deja al lector que calcule la aceleración del bloque. Resp. 2.0 m/s^2** (ver figura 5.14)

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE UN BLOQUE SOBRE UN PLANO INCLINADO

En el caso de que un cuerpo se encuentre sobre un plano inclinado, normalmente las fuerzas son descompuestas tomando el eje x paralelo a la superficie del plano inclinado y el eje y perpendicular a x. En el siguiente ejemplo se ilustra esta situación. Considere que el cuerpo se encuentra en reposo.

Como el cuerpo está en reposo, debe cumplirse que la suma de todas las fuerzas debe ser igual a cero. Se ha añadido la fuerza de fricción para que el cuerpo no deslice a lo largo de la superficie del plano inclinado.

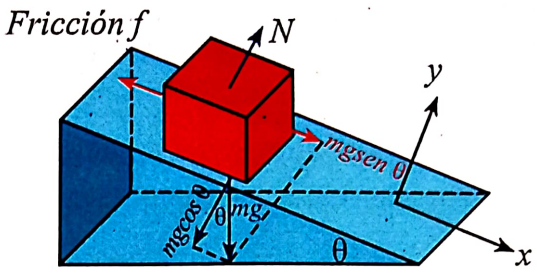


Figura 5.15

Para que el cuerpo esté en reposo, se debe cumplir que la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje de las y debe ser igual a cero y que la sumatoria de las fuerzas a lo largo del eje de las x también debe ser igual a cero.

Esto es: $\sum F_y = 0$ $\quad N - mg\cos\theta = 0$ $\quad N = mg\cos\theta$

$\sum F_x = 0$ $\quad mg\,\mathrm{sen}\theta - f = 0$ $\quad f = mg\,\mathrm{sen}\theta$

No siempre se cumple que la normal es igual a $mg\cos\theta$, ni tampoco que la fuerza de fricción es igual a $mg\,\mathrm{sen}\theta$.

CÁLCULO DE LA ACELERACIÓN DE UN BLOQUE QUE DESLIZA SOBRE UN PLANO INCLINADO SIN FRICCIÓN

Ahora se va a suponer que el plano inclinado de la figura 5.16 es liso (sin fricción). En este caso se debe eliminar la fuerza de fricción del diagrama de cuerpo libre y, por lo tanto, a lo largo del eje de las x quedará una sola fuerza la que provocará en el bloque una aceleración hacia abajo y a lo largo del plano inclinado.

La única fuerza que queda a lo largo del eje positivo de las x es $mg\,\mathrm{sen}\theta$, esta fuerza es la responsable de la aceleración del bloque. De acuerdo a la segunda ley de Newton:

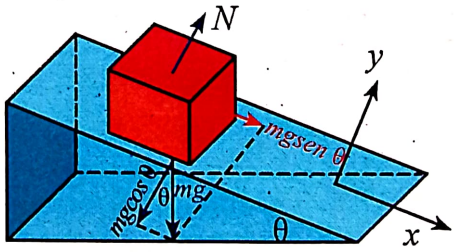


Figura 5.16

$\sum F_x = ma$ $\quad mg\,\mathrm{sen}\theta = ma$

$$a = g\,\mathrm{sen}\theta \qquad (5.8)$$

Esta última expresión indica que la aceleración de un objeto que desliza sobre un plano inclinado liso no depende de la masa sino solamente de la inclinación del plano; **es decir, si soltamos desde lo alto de un plano inclinado dos objetos de diferente masa, estos llegarán a la base del plano al mismo tiempo.** Esto es válido solamente si el plano es liso, es decir, que no exista fricción.

Ejemplo 5.6 -

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE DE DOS BLOQUES EN CONTACTO EMPUJADOS POR UNA FUERZA

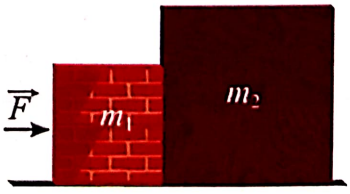


Figura 5.17

De acuerdo a la tercera ley de Newton el bloque m_1 ejerce una fuerza sobre el bloque m_2 y el bloque m_2 ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección opuesta sobre el bloque m_1; por lo tanto, el diagrama de cuerpo libre de los bloques m_1 y m_2 es:

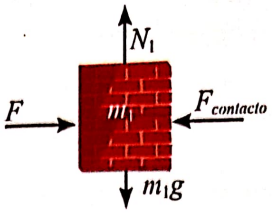


Figura 5.18(a)

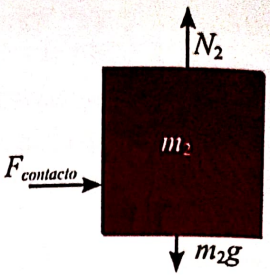


Figura 5.18(b)

Observe que sobre el bloque m_1 en la figura 5.18 (a), actúa la fuerza externa F y la fuerza $F_{contacto}$ que es la fuerza que el bloque m_2 ejerce sobre el bloque m_1. Si la superficie es sin fricción, los bloques m_1 y m_2 tendrán una aceleración hacia la derecha de igual magnitud.

Para el bloque m_1: $\sum F_x = m_1 a$ $\quad F - F_{contacto} = m_1 a$

Para el bloque m_2: $\sum F_x = m_2 a$, $\quad F_{contacto} = m_2 a$

Sumando las dos últimas ecuaciones, se observa que se cancela la fuerza de contacto y queda:

$F = m_1 a + m_2 a$ $\quad F = (m_1 + m_2)a$

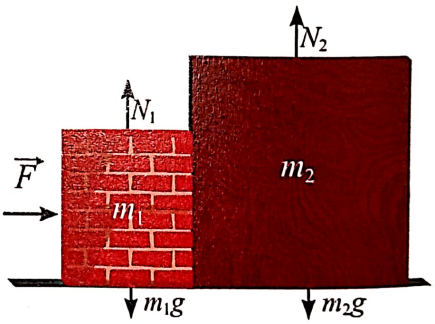
y despejando la aceleración:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \qquad (5.9)$$

Debe notarse que la fuerza de contacto actúa hacia la izquierda sobre el bloque m_1 y hacia la derecha sobre el bloque m_2, esto se debe a la tercera ley de Newton.

Otra forma de resolver el problema anterior es considerando a los bloques m_1 y m_2 como un sistema; es decir, que existe un solo bloque cuya masa es $(m_1 + m_2)$ y que sobre este gran bloque se aplica la fuerza externa F.

El diagrama de cuerpo libre correspondiente quedaría de la siguiente forma: en este diagrama de cuerpo libre no aparece la fuerza de contacto porque son fuerzas internas y se cancelan mutuamente.



La ecuación sería: $\sum F_x = (m_1 + m_2)a$ $\quad F = (m_1 + m_2)a$ y despejando la aceleración queda: $a = F/(m_1 + m_2)$ que corresponde al mismo resultado encontrado en la ecuación (5.9).

CÁLCULO DE LA FUERZA DE CONTACTO

Un estudiante pregunta a su profesor ¿cuál es el valor de la fuerza de contacto? Para eso debemos trabajar con uno de los bloques, por ejemplo tomemos el bloque m_2:

Por lo tanto: $\sum F_x = m_2$ a $\quad F_{contacto} = m_2 \dfrac{F}{m_1 + m_2}$

$$F_{contacto} = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)} F \qquad (5.10)$$

Se observa que la fuerza de contacto que actúa sobre el bloque m_2 es menor que la fuerza externa F, y debe ser así porque la fuerza de contacto acelera solo al bloque m_2 mientras que la fuerza externa F acelera una masa mayor que es $(m_1 + m_2)$. Se deja al lector que calcule la fuerza de contacto usando el bloque m_1.

El resultado debe ser igual al encontrado en la ecuación (5.10). Si en lugar de aplicar la fuerza externa sobre el bloque de masa m_1 y hacia la derecha, se aplicará sobre el bloque m_2 y hacia la izquierda, el valor de la

aceleración no cambia, pero si cambia el valor de la fuerza de contacto. En uno de los ejercicios propuestos se pide que calcule este problema pero con datos de las masas y de la fuerza externa.

$$\sum F = (m_1 + m_2)$$

$$F = (m_1 + m_2)\, a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

Se observa que la magnitud de la aceleración no cambia ya que es idéntica a la ecuación (5.9).

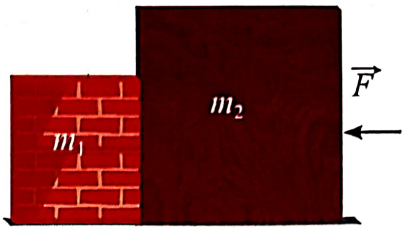


Figura 5.19

Ejemplo 5.7 - PESO APARENTE EN UN ASCENSOR

Se va a suponer que un hombre de 70 kg se para sobre una balanza que reposa sobre el piso de un ascensor; si el ascensor está en reposo o se mueve con velocidad constante, ya sea hacia arriba o hacia abajo, la balanza marcará su verdadero peso, es decir mg.

En cada uno de siguientes casos mostrados en la figura 5.20 y 5.21, calcule el valor que marca la balanza. **El valor que marca la balanza está dado por la normal.**

a) El ascensor está en reposo: La balanza marca $N = mg = 70kg \times 10\ m/s^2 \rightarrow N = 700\ N$

b) El ascensor se mueve hacia arriba con velocidad constante:

Un movimiento con velocidad constante implica que la aceleración es igual a cero.

Así: $\sum F_y = 0 \quad N - mg = 0 \quad N = mg \quad N = 700\ N$

c) El ascensor se mueve hacia abajo con velocidad constante.

Como en el caso anterior, la sumatoria de fuerzas es igual a cero, es decir la balanza marcará 700 N.

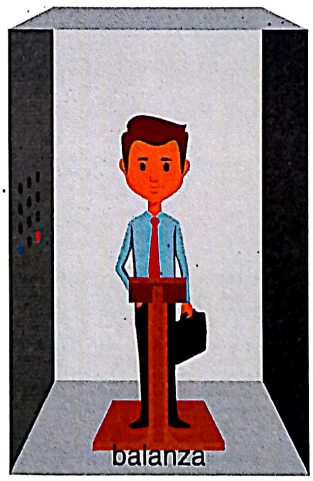


Figura 5.20

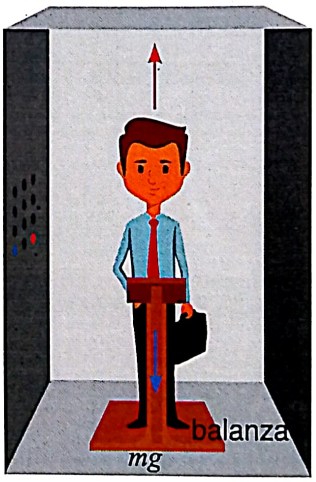


Figura 5.21

d) El ascensor tiene una aceleración de $1 m/s^2$ hacia arriba.

Como el ascensor acelera hacia arriba, la fuerza normal va a ser mayor que el peso del hombre. Como la normal es la que indica lo que marca la balanza, el peso aparente del hombre será mayor que 700 N.

Así: $\uparrow \sum F = ma \Rightarrow N - mg = ma \Rightarrow N = m(g+a)$ esta última ecuación indica que el valor que marca la balanza (N) es mayor que el peso real (mg).

Por lo tanto: $N = 70kg(10+1)\ m/s^2 \rightarrow N = 770\ N.$

e) El ascensor se mueve hacia abajo y desacelera con a = $1 m/s^2$.

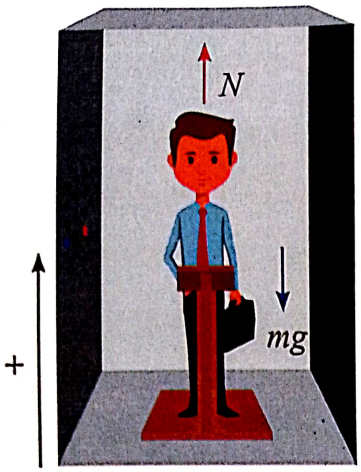


Figura 5.22

En este caso el ascensor que estaba bajando con velocidad constante, empieza a frenarse, por lo tanto el valor de la normal (lo que marca la balanza) será mayor al peso real de la persona (mg). Así: $\uparrow \sum F = ma$

$N - mg = ma \Rightarrow N = m(g + a)$

$N = 70kg\,(10+1)\,m/s^2 \Rightarrow N = 770\,N$. Este valor es mayor que el peso real del hombre. De hecho, el hombre se siente pesado mientras el ascensor se está frenando.

En el caso de que el ascensor esté descendiendo con una aceleración igual a la aceleración de la gravedad, el hombre parado sobre la balanza observará que esta marca cero. En este caso el hombre y la balanza aceleran hacia abajo a $10\ m/s^2$. Usted en estas circunstancias flotaría en el espacio del ascensor y este estado es de ingravidez. ¿Qué sentirán los astronautas mientras flotan en el espacio?

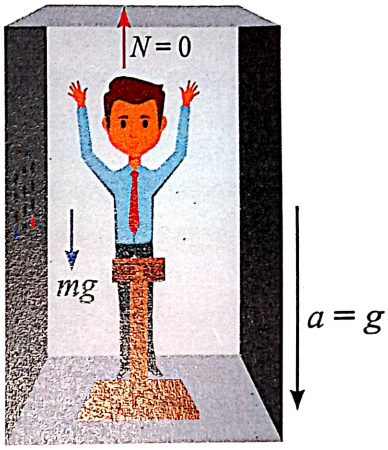


Figura 5.23

Ejemplo 5.8 - MÁQUINA DE ATWOOD

Se denomina como máquina de Atwood al arreglo que se muestra en la figura 5.24 consiste de una polea sin masa y sin fricción (asumimos poléa ideal) por la que pasa una cuerda de masa despreciable y de cada extremo se cuelgan dos objetos de masas diferentes. Se trata de determinar la aceleración de las masas cuando son soltadas desde el reposo. Suponga que $m_1 > m_2$.

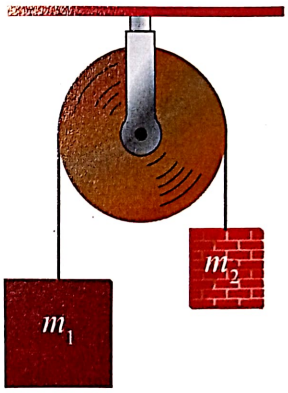


Figura 5.24

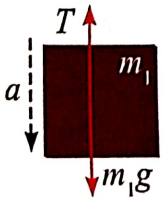


Figura 5.25(a)

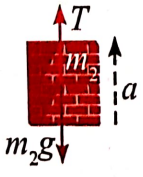


Figura 5.25 (b)

En las figuras 5.25(a) y 5.25 (b) constan los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques donde se observa que el bloque m_1 baja y que el bloque m_2 sube.

Como asumimos que la cuerda no se puede estirar, las aceleraciones de los dos bloques deben ser iguales en magnitud pero en direcciones diferentes.

De los diagramas de cuerpo libre, se observa que las tensiones sobre los dos bloques son iguales, esto sucede en el caso ideal ya que se considera que la polea tiene masa despreciable y que además no hay fricción en su eje.

También se supone que la cuerda que une los bloques tiene masa despreciable.

Si el bloque m_1 tiene mayor masa que el bloque m_2, el primero se moverá hacia abajo mientras que el segundo lo hará hacia arriba con la misma magnitud de la aceleración. Por lo tanto se debe realizar la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre m_1 e igualar al producto de su masa por su aceleración.

Así: $\sum F = m_1 a \qquad m_1 g - T = m_1 a$ Ecuación A

Para el bloque m_2 se realiza algo similar, es decir que la sumatoria de las fuerzas que actúan sobre él es igual al producto de su masa por su aceleración, sabiendo que la magnitud de la aceleración para los dos bloques es la misma.

Así: $\sum F = m_2 a \qquad T - m_2 g = m_2 a$ Ecuación B

De las dos ecuaciones anteriores (A) y (B), las incógnitas son la tensión T y la aceleración a. Como el objetivo es hallar la aceleración, se debe eliminar la tensión. Sumando las dos ecuaciones A y B se observa que se cancela la tensión en la cuerda.

Sumando $A+B$: $m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a$

$(m_1 - m_2) g = (m_1 + m_2) a$

Despejando la aceleración:

$$a = (m_1 - m_2) g / (m_1 + m_2) \qquad (5.11)$$

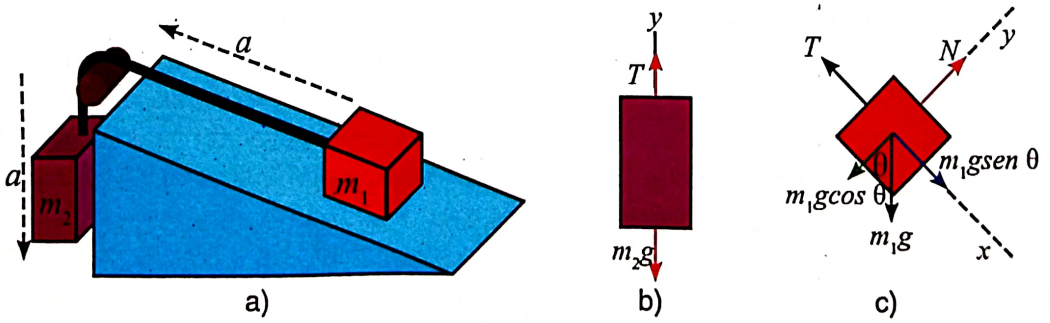
De este resultado se puede observar que si las masas son iguales, el numerador de la ecuación (5.11) se vuelve cero y por lo tanto la aceleración sería cero.

Para el ejemplo de la máquina de Atwood, se nota que la masa m_1 se encuentra por debajo de la masa m_2. Suponga que las masas son soltadas desde el reposo. ¿Cuál sería el movimiento inicial de los cuerpos si la masa de la cuerda no es despreciable y las masas de los objetos son iguales? Se deja al lector analizar este caso.

Ejemplo 5.9 - Dos bloques de masas $m_1 = 2.0\ kg$ y $m_2 = 4.0\ kg$ están unidos mediante una cuerda inextensible y de masa despreciable que pasa sobre una polea liviana y sin fricción que se encuentra en la parte más alta de un plano inclinado liso el cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Si los bloques parten del reposo, calcule la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda.

Solución.

En la figura 5.26 (a) se supone que el bloque m_2 baja y que el m_1 sube a lo largo del plano inclinado. En las figuras 5.26 (b) y 5.26 (c) los correspondientes diagramas de cuerpo libre.



a) b) c)

Figura 5.26

En la figura 5.26 (a) se observa a un bloque de masa m_1 conectado a otro bloque de masa m_2 a través de una cuerda inextensible y de masa despreciable, por lo tanto la tensión de la cuerda es la misma para los dos bloques. En las figuras 5.26 (b) y 5.26 (c) se muestran los diagramas de cuerpo libre de los dos bloques. Aplicando las leyes de Newton al bloque de masa m_2 suponiendo que hacia abajo es la dirección positiva se tiene:

Bloque de masa m_2: $\sum F_y = m_2 a$. Si el bloque que cuelga va a tener aceleración hacia abajo implica que la fuerza resultante sobre el bloque debe tener la misma dirección que la aceleración, por lo tanto, para que eso ocurra el peso $m_2 g$ debe ser mayor que la tensión T.

Realizando la sumatoria y considerando positivo hacia abajo, se tienen:

$$m_2\ g - T = m_2 a \qquad (5.12)$$

Para el bloque de la figura 5.26 (c), se observa su diagrama de cuerpo libre en el cual se considerará que el eje x es aquel que es paralelo al plano inclinado y el eje y es perpendicular al eje x.

Debido a que el movimiento será a lo largo del eje de las x, la sumatoria de todas las fuerzas en esa dirección debe ser igual a $m_1\ a$.

Así: $\sum Fx = m_1$ a Si el bloque que se halla sobre el plano va a moverse paralelo al plano y hacia arriba, entonces esa es la dirección positiva.

$$T - m_1 g\ sen\ 30° = m_1\ a \qquad (5.13)$$

Para calcular la aceleración de los bloques primero debemos eliminar la tensión, esto se consigue sumando las ecuaciones (5.12) y (5.13).

$$m_2 g - T + T - m_1 g sen30° = m_2 a + m_1 a \qquad m_2 g - m_1\ g\ sen30° = m_2 a + m_1 a$$

$$(m_2 - m_1 sen30°) g = (m_2 + m_1) a \qquad (5.14)$$

Despejando la aceleración de la última ecuación queda:

$$a = \frac{(m_2 - m_1 sen30°)\ g}{(m_2 + m_1)}$$ y reemplazando los datos: $$a = \frac{(4.0 - 2.0 sen30°) \times 10\ m/s^2}{(4.0 + 2.0) kg}$$

$a = 5.0\ \frac{m}{s^2}$ Este es el resultado de la ecuación 5.14

Para calcular la tensión se puede usar la ecuación (5.12) o la ecuación (5.13) ya que se conoce el valor de la aceleración.

Usando (5.12) $m_2 g - T = m_2 a$ despejando T: $T = m_2 (g - a)$

$$T = 4.0\ kg\ x\ (10 - 5.0)\ \frac{m}{s^2} = 20\ N$$

El signo de la aceleración salió positivo lo que indica que el sistema se acelera de acuerdo a lo que nosotros supusimos, es decir, que el bloque m_2 se acelera hacia abajo y que el bloque m_1 se acelera hacia arriba sobre el plano inclinado. Si la aceleración hubiera salido negativa, entonces los bloques tendrán aceleración en la dirección opuesta pero la misma magnitud de $5.0\ m/s^2$. Esta conclusión es válida ya que no existe fricción entre el bloque m_1 y el plano inclinado; de existir fricción esta conclusión no sería válida, y se debe resolver nuevamente suponiendo el sentido correcto de la aceleración.

Observe la figura 5.26 (a) donde se puede notar que si $m_2 g$ fuera menor que $m_1 g sen30°$ el sistema habría sido contrario al encontrado, es decir, el bloque m_2 aceleraría hacia arriba en lugar de abajo.

Si calculamos el valor $m_2 g$ este da $40N$, mientras que $m_1 g sen30°$ da un valor de $10\ N$ siendo este último mucho menor que $m_2 g$; por lo tanto, la fuerza neta sobre el sistema de bloques sería igual a $m_2 g - m_1 g sen30° = 30N$.

Esta es la fuerza neta que mueve el sistema el cual está compuesto de la masa total que es de $6.0kg$; en este caso no se toma en cuenta la tensión porque serían fuerzas internas. Por lo tanto, aplicando la segunda ley de

Newton quedaría de la siguiente forma: **Fuerza neta = masa total × aceleración.**

$$aceleración = \frac{Fuerza\ neta}{masa\ total} \qquad aceleración = \frac{30.0\ N}{6\ kg} = 5.0\ \frac{m}{s^2}$$

Lo cual concuerda con el resultado de la ecuación (5.14)

5.9 FUERZAS DE FRICCIÓN

Para resolver los problemas relacionados con dinámica de forma sencilla, suponemos superficies lisas (ideales); es decir, despreciamos la fuerza de fricción que existe entre las superficies en contacto, pero en la realidad sí existen estas fuerzas y se ponen en manifiesto como por ejemplo: cuando tratamos de mover ciertos cuerpos sobre una superficie real donde no podemos despreciar estas fuerzas de fricción.

Debe haber notado que ciertos objetos que están sobre el piso presentan cierta resistencia cuando uno trata de moverlos, unos se resisten más que otros. Suponga que usted desea mover un baúl que se encuentra sobre el piso aplicando una fuerza horizontal sobre el mismo, resulta que cuando la fuerza aplicada es pequeña el baúl no se mueve de modo que usted empieza a aumentar la fuerza; de pronto, el baúl sale del reposo y mantenerlo en movimiento resulta más fácil que sacarlo del reposo. Es decir, el cuerpo necesita una gran fuerza para empezar a moverse pero una vez que se ha movido es fácil que se siga moviendo; más aún, si la fuerza necesaria para sacarlo del reposo se mantiene, el baúl se moverá con aceleración. De esta manera si se desea que el baúl se mueva con velocidad constante, será necesario disminuir la fuerza que se usó para sacarlo del reposo.

A la fuerza de resistencia que está presente en los cuerpos que se mantienen en reposo cuando se aplica una fuerza externa F se le denomina fuerza de rozamiento estática o fuerza de fricción estática y su símbolo es f_s. Esta fuerza es de naturaleza variable que empieza desde cero hasta un valor límite como se verá en los siguientes ejemplos.

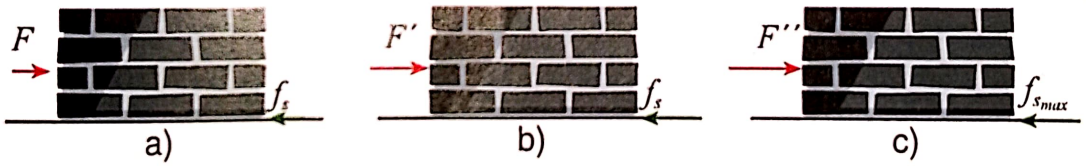


Figura 5.27

En la figura 5.27 (a) se aplica una fuerza $\vec{F}$ al baúl y este no se mueve debido a que aparece una fuerza de fricción igual a $\vec{F}$ en magnitud pero opuesta en dirección, llamada f_s; por lo tanto la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje horizontal es igual a cero. Esta fuerza es denominada fuerza de rozamiento estática (f_s) y está relacionada con la rugosidad entre las superficies que están en contacto.

En la figura 5.27 (b) se aplica una fuerza mayor F' al baúl y este aún no se mueve, por lo tanto, esto implica que la fuerza que se opone al movimiento ha aumentado en magnitud y la sumatoria de fuerzas en la dirección horizontal se sigue manteniendo igual a cero; de esta manera la fuerza de rozamiento estática es mayor que aquella de la figura 5.27 (a). En la figura 5.27 (c) se aplica una fuerza F'' aún mayor que en los casos anteriores y el baúl continúa en reposo pero está a punto de moverse. Esto quiere decir que la fuerza de rozamiento estática ha llegado a su valor máximo y que si la fuerza F'' aumenta muy ligeramente su magnitud, el baúl entraría en movimiento. Una vez que el movimiento ha empezado, el baúl se moverá con más facilidad y es por esto que se moverá con aceleración. De observaciones experimentales se ha comprobado que la fuerza de rozamiento estática máxima es directamente proporcional a la fuerza normal; de esta manera, la fuerza de fricción estática máxima sería expresada matemáticamente como:

$$f_{s\,max} = \mu_s N \qquad (5.15)$$

donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático, el cual depende de la clase de materiales en contacto y del grado de rugosidad de la superficie. Hasta ahora se ha mencionado que es más fácil mantener a un cuerpo en movimiento que sacarlo del reposo pero no ha habido una explicación al respecto.

Una superficie puede parecer perfectamente pulida y sin rugosidad, sin embargo al hacer una ampliación de la superficie o al verla usando un microscopio se notarán grandes irregularidades y aparecerán picos que evitan el movimiento. De hecho cuando dos superficies están en contacto los picos se sueldan en frío y cuando se trata de mover el cuerpo primero hay que romper esta clase de soldadura y esa es la razón por la que resulta difícil sacar un cuerpo del reposo.

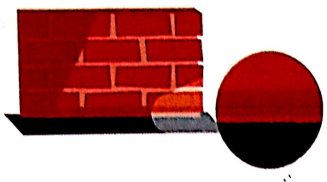


Figura 5.28

A continuación veremos una superficie que parece lisa y una ampliación de la misma.

En una ampliación de una pequeña sección de dos superficies en contacto. Los picos que se tocan llegan a soldarse y hacen difícil sacar un objeto del reposo.

Una vez que el baúl se ha puesto en movimiento es la fuerza de rozamiento cinética denotada por f_k la que entra en acción; esta fuerza de rozamiento actúa únicamente cuando el objeto está en movimiento relativo entre las dos superficies en contacto. Por ejemplo, f_k no actúa cuando caminamos o cuando un cilindro rueda a lo largo de un plano porque no hay movimiento relativo del zapato con respecto al suelo, ya que una persona al caminar no arrastra los pies; tampoco hay movimiento relativo del cilindro con la superficie del plano ya que el cilindro rueda sin deslizar. En estos casos la fuerza de rozamiento es la estática f_s.

Experimentalmente se observa que esta fuerza de rozamiento cinética f_k es directamente proporcional a la normal y matemáticamente se expresa como:

$$f_k = \mu_k N \qquad (5.16)$$

La constante de proporcionalidad entre la fuerza de rozamiento cinético y la normal se conoce como coeficiente de rozamiento cinético y se denota por μ_k; este coeficiente no depende del área de contacto pero si depende de la velocidad. Además se cumple siempre que $\mu_s > \mu_k$. En este texto consideraremos que los coeficientes de rozamiento estático y cinético mantienen un valor constante.

Es importante recalcar que f_k no cambia, pero f_s si lo hace tomando valores desde 0 hasta $f_{smax} = \mu_s N$.

Ejemplo 5.10 - Un bloque de masa $5.0\ kg$ se halla en reposo sobre una superficie horizontal cuyos coeficientes de rozamiento estático y cinético son: μ_s=0.4 y μ_k=0.2 respectivamente. Se aplica una fuerza horizontal sobre el bloque.

a) Calcule la fuerza necesaria para que el bloque esté a punto de moverse.

b) De mantenerse esta fuerza, una vez que el bloque se ha puesto en movimiento, calcule la aceleración que adquiriría el bloque.

c) Calcule la fuerza que debe aplicarse para que el bloque se mueva con velocidad constante una vez que haya sido puesto, previamente, en movimiento.

Solución.

a) La fuerza necesaria para que el cuerpo esté a punto de moverse es igual a la fuerza de rozamiento estática máxima: $f_{smax} = \mu_s N$ donde la normal es igual al peso del bloque como se puede observar en el diagrama de cuerpo libre de la figura 5.29.

$$\sum F_y = 0 \qquad N - mg = 0 \qquad N = mg$$

$$F = f_{smax} = \mu_s\, m\, g$$

$$F = 0.4\ (5.0kg)\ (10\ m/s^2)$$

$$F = 20\ N$$

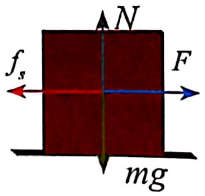


Figura 5.29

Al aplicar esta fuerza sobre el bloque, este estará a punto de moverse.

b) Una vez que el bloque se ha puesto en movimiento, la fuerza que se opone al movimiento es la fuerza de rozamiento cinética, y si se mantiene la fuerza de 20 newtons, el bloque experimentará una aceleración. Esta aceleración se debe a que la fuerza para empezar a mover el bloque ($20\ N$) es mayor que la fuerza que se opone al movimiento ($\mu_s\, m\, g = 9.8\ N$) debido a que el coeficiente de rozamiento cinético μ_k siempre es menor que el coeficiente de rozamiento estático μ_s

$$\sum F = m\, a \qquad F - f_k = m\, a \qquad F - \mu_k\, m\, g = m\, a$$

donde $\mu_k\, m\, g$ es la fuerza de rozamiento cinética. Entonces, despejando la aceleración:

$$a = \frac{F - \mu_k\, m\, g}{m}$$

y reemplazando los datos del problema se tiene:

$$a = \frac{20\ N - 0.2\ (5.0\ kg)(10 m/s^2)}{5.0\ k\, g} = 2.0\ m/s^2$$

c) Para que el bloque se mueva con rapidez constante, la fuerza que se debe aplicar al bloque es igual a la fuerza de rozamiento cinética $f_k = \mu_k\, m\, g$

$$F = \mu_k\, m\, g = 0.2\ (5.0\ kg)\ (10 m/s^2)$$

$$F = 10\ N$$

Ejemplo 5.11 - Un bloque de $10.0\ kg$ se suelta en la parte más alta de un plano inclinado cuyo coeficiente de rozamiento cinético es de 0.3 y el ángulo que forma con la horizontal es de 60°.Calcule la aceleración que adquiere el bloque.

Solución

Como el bloque se está moviendo, la fuerza de fricción que se opone al movimiento será la fuerza de rozamiento cinética. Mientras $mgsen\theta$ trata de acelerar el bloque, la fuerza de fricción cinética $f_k = \mu_k\, mgcos\theta$, trata de desacelerarlo.

La aceleración del bloque será paralela al plano inclinado por lo tanto la sumatoria de fuerzas a lo largo del eje x será igual al producto de la masa por la aceleración. Debido a que el cuerpo no tiene aceleración a lo largo del eje y, la sumatoria de fuerzas en este eje será igual a cero.

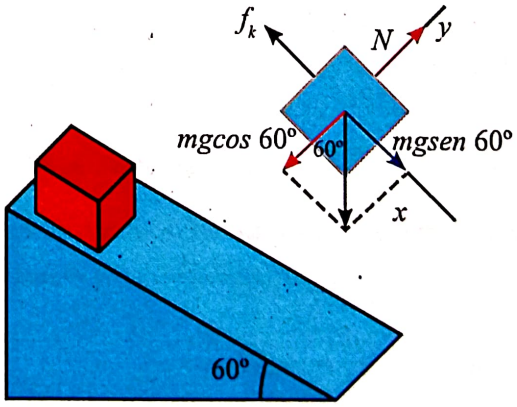


Figura 5.30

En y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N - mgcos60° = 0 \rightarrow N = mgcos60°$

$N = 10kg \times 10\ m/s^2 \times 0.5 \rightarrow N = 50\ N$

En x: $\sum F_x = m\, a \rightarrow mgsen\theta - f_k = m\, a \rightarrow mgsen\theta - \mu_k N = m\, a$

Despejando la aceleración de la expresión anterior se obtiene: $a = 7.16\ m/s^2$

Ejemplo 5.12 - Un bloque de 2.0 kg se mantiene en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Calcule el valor de la fuerza de rozamiento estático.

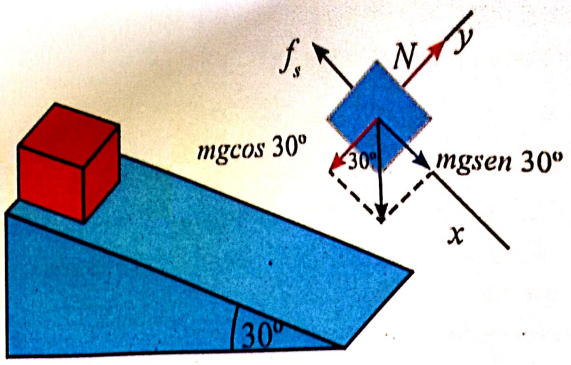


Figura 5.31

Cuidado con calcular $f_s = \mu_s N$ esto es INCORRECTO. Haciendo esto, estaría calculando la fuerza de rozamiento máxima, como si el bloque estuviera a punto de moverse. Lo correcto es hacer la sumatoria de fuerzas en el eje x e igualar a cero ya que el bloque está en reposo:

$\sum F_x = 0$; $mgsen30° - f_s = 0$; $f_s = 2.0\ kg \times 10\ m/s^2 \times sen\ 30°$

$f_s = 10\ N$

Nota: La fuerza de fricción estática f_s no necesariamente es la máxima.

Ejemplo 5.13 - Un bloque se halla sobre un plano horizontal y éste empieza a inclinarse lentamente hasta que el bloque está a punto de moverse. En ese instante el plano forma un ángulo θ con la horizontal, calcule el coeficiente de fricción estático.

Solución

Se sostiene el bloque en reposo debido a la fuerza de rozamiento estática. Si el bloque está a punto de moverse, entonces la fuerza de fricción estática llegó a su valor máximo y es: $f_{smax} = \mu_s N$ donde μ_s es el coeficiente de rozamiento estático y N es la normal. La normal es perpendicular al plano.

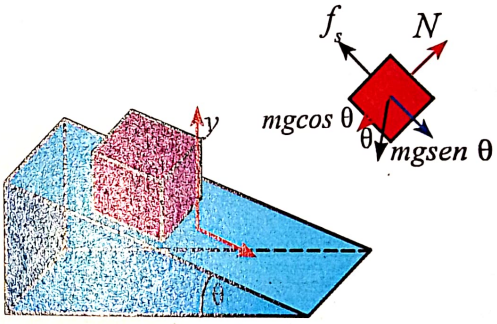


Figura 5.32

Debido a que el bloque está en reposo, se debe cumplir que:

$\sum F_x = 0$ y $\sum F_y = 0$.

Por: $\sum F_x = 0$

$$mgsen\theta - f_{smax} = 0 \qquad (5.17)$$

Observe que $mgsen\theta$ es positivo porque se dirige en la dirección positiva del eje de las x, mientras que f_s es negativa porque se dirige hacia el lado negativo del eje de las x.

Sobre el eje y: $\sum F_y = 0$ $\qquad N - mgcos\theta = 0$

De esta última ecuación se obtiene que: $N = mgcos\theta$

Por lo tanto la fuerza de rozamiento estática máxima será: $f_{smax} = \mu_s\ mgcos\theta$

y remplazando este valor en la ecuación (5.17) se obtiene:

$mgsen\theta = \mu_s\ mgcos\theta$

Se cancela mg y queda: $sen\theta = \mu_s\ cos\theta$

$$\mu_s = tan\theta \qquad (5.18)$$

Este resultado nos permite calcular el coeficiente de rozamiento estático de cualquier objeto, simplemente levantando la superficie donde se encuentra el bloque hasta que el objeto esté a punto de moverse. Luego se mide el ángulo que este plano forma con la horizontal. La tangente de este ángulo es igual al coeficiente de rozamiento estático entre el bloque y la superficie del plano.

Ejemplo 5.14 - Para el diagrama mostrado en la figura 5.33: (a) calcule la aceleración de los bloques m_1 y m_2. Suponga que la polea es ideal y que el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano inclinado y el bloque es 0.50.

Datos: $m_1 = 8.0\ kg$; $m_2 = 10.0\ kg$

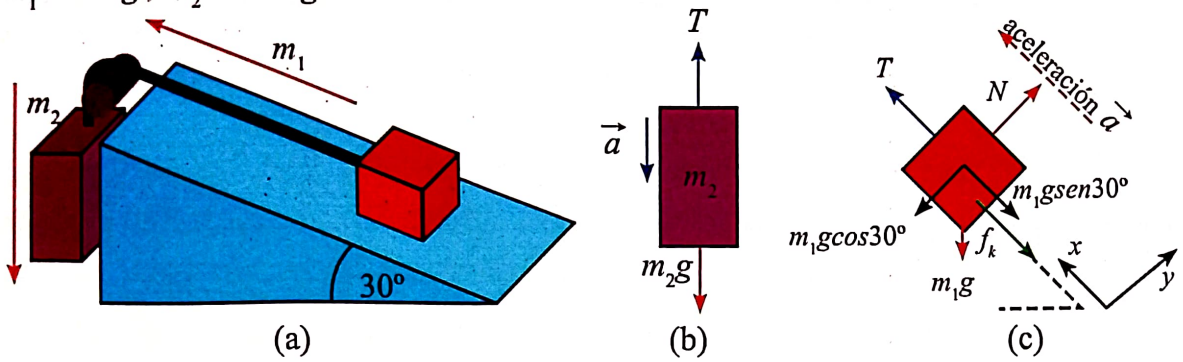


Figura 5.33

Solución

En la figura 5.33 (b) se halla el diagrama de cuerpo libre del bloque m_2 y en la figura 5.33 (c) está el diagrama de cuerpo libre del bloque m_1.

Realizando la sumatoria de fuerzas del bloque m_2 se tiene: $\downarrow \sum F = m_2 a$

$$m_2 g - T = m_2 a \qquad (5.19)$$

Realizando la sumatoria de fuerzas del bloque m_1, se tiene: $\sum F_x = m_1 a$

$$T - m_1 g\, sen30° - \mu_k N = m_1 a \qquad (5.20)$$

Para el bloque m_1, la sumatoria de fuerzas en la dirección y es igual a cero, ya que en esa dirección no hay movimiento del bloque. Por lo tanto: $\sum F_y = 0$ $\qquad N - m_1 g\, cos30° = 0$

$$N = m_1 g\, cos30° \qquad (5.21)$$

Sumado las ecuaciones (5.19) y la ecuación (5.20) se elimina la tensión y reemplazando la ecuación (5.21).

$$m_2 g - m_1 gsen30° - \mu_k m_1 gcos30° = (m_1 + m_2)a$$

Despejando: $a = \dfrac{m_2 g - m_1 gsen30° - \mu_k m_1 gcos30°}{(m_1 + m_2)} = \dfrac{10m/s^2(10.0kg - 8.0kg \times 0.5 - 0.5 \times 8.0kg \times 0.866)}{(8+10)kg} = 1.4\ m/s^2$

5.10 DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Una de las aplicaciones de las Leyes de Newton es el movimiento de una partícula que se mueve con rapidez constante siguiendo una trayectoria circular.

PERÍODO

Se define como el tiempo en el que una partícula realiza una revolución o que realiza una vuelta completa. Si la partícula se mueve con rapidez constante v y se mueve en una trayectoria circular de radio r, el tiempo en realizar una vuelta completa será: $T = \dfrac{2\pi r}{v}$

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad (5.22)$$

donde v es la rapidez de la partícula, r es el radio de la trayectoria circular y T es el período. La unidad del período en el sistema internacional ($S.I$) es el segundo.

FRECUENCIA

Se define como el número de revoluciones que realiza una partícula en un segundo. Por lo tanto la relación entre período y frecuencia es:

$$T = \frac{1}{f} \qquad (5.23)$$

Las unidades de la frecuencia son: *rev/s*; *rev/min*; *vueltas/s*; *vibraciones/s*; o *Hz* (s^{-1})

Ejemplo 5.15 - Un disco de 60*mm* de radio gira a 120 revoluciones por minuto (*rpm*), ¿cuál es la rapidez de un punto de su periferia?

Solución

La frecuencia es 120 revoluciones cada minuto y expresando este dato en revoluciones por segundo se puede calcular el período.

$$\frac{120rev}{min} = \frac{120rev}{min} \times \frac{min}{60s} \qquad f = 2.0\ \frac{rev}{s} = 2.0\ Hz$$

por lo tanto, el período será: $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2.0s^{-1}} \qquad T = 0.5s$

Conociendo el período y el radio se puede aplicar la ecuación (5.22):

$$v = \frac{2\pi r}{T} \qquad v = \frac{2\pi \times 0.060m}{0.5s} \qquad v = 0.75\ m/s$$

Por lo tanto, cada punto de la periferia se mueve a 0.75 *m/s*. Sin embargo, la velocidad de los puntos de la periferia del disco no es constante pues está cambiando continuamente su dirección; por esta razón al movimiento circular uniforme se lo conoce como movimiento circular con rapidez constante y no con velocidad constante. Recuerde que la velocidad es un vector y este vector velocidad está cambiando continuamente su dirección, ya que es tangente a la trayectoria. Cuando se dice que un movimiento es con velocidad constante, ese movimiento tiene que ser en línea recta y en una sola dirección.

5.11 ACELERACIÓN CENTRÍPETA

En el párrafo anterior se aclaró que velocidad constante significa movimiento en línea recta, en esta parte del texto se estudiará el movimiento circular uniforme y las fuerzas que actúan sobre una partícula que describe este tipo de movimiento.

Debido a que la velocidad es tangente a la trayectoria, cuando la partícula realiza un movimiento circular, la magnitud de la velocidad se puede mantener constante pero no su dirección la cual estará cambiando continuamente.

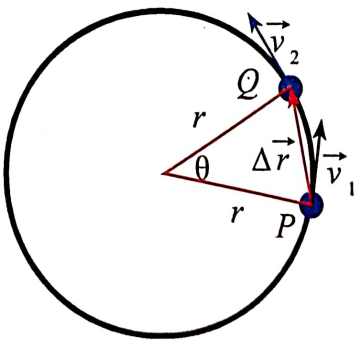


Figura 5.34

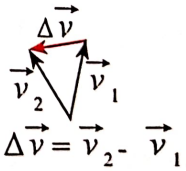


Figura 5.35

La figura 5.34 muestra el movimiento de una partícula que se mueve del punto P al punto Q, en el cual la velocidad cambia de $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Estas dos velocidades están representadas en la figura 5.35.

En la figura 5.34 el triángulo en rojo es semejante al triángulo de la figura 5.35 debido a que las velocidades al ser tangentes a la trayectoria, son perpendiculares a los radios. Por lo tanto se puede realizar la siguiente relación:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \qquad (5.24)$$

donde Δr es la distancia que la partícula se mueve durante un intervalo de tiempo Δt con rapidez constante v. Así, $\Delta r = v\Delta t$. Remplazando en la ecuación (5.24):

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v\Delta t}{r} \qquad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

reconociendo que: $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ = aceleración.

$a_c = \frac{v^2}{r}$ dirigida hacia el centro de la trayectoria circular.

donde a_c es llamada aceleración centrípeta o aceleración radial debido a que esta aceleración produce exclusivamente el cambio en la dirección de la velocidad y no al cambio en la magnitud de la velocidad.

La relación que existe entre la rapidez tangencial y la rapidez angular es: $v = \omega r$ donde ω es la rapidez angular de la partícula y r es el radio de la trayectoria circular. Por lo tanto:

$$a_c = \frac{v^2}{r} \qquad (5.25)$$

reemplazando v = ωr se obtiene:

$$a_c = \omega^2 r \qquad (5.26)$$

En el siguiente diagrama se observa la velocidad de la partícula y su aceleración centrípeta. Observe que mientras la velocidad es tangente a la trayectoria circular, la aceleración centrípeta es perpendicular al vector velocidad y dirigida hacia el centro de la trayectoria circular que describe la partícula.

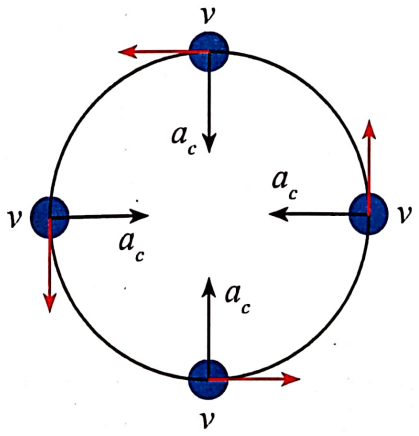


Figura 5.36

Ejemplo 5.16 - Una partícula se mueve siguiendo una trayectoria circular cuya circunferencia mide 50.0π *cm*. con una rapidez de 5.0 *cm/s*. Calcule la magnitud de la aceleración centrípeta.

Solución

En este problema se da el perímetro de la circunferencia, por lo tanto primero calcularemos su radio. El perímetro está dado por: $p = 2\pi r$.

$$r = \frac{p}{2\pi} = \frac{50.0\pi cm}{2\pi} = 25.0cm$$

Luego, aplicamos la fórmula para la aceleración centrípeta. $a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(5.0\ cm/s)^2}{25.0cm} = a_c = 1.0\ cm/s^2$

¿Cómo cambia la aceleración centrípeta si se duplica la rapidez?

Dado que la aceleración centrípeta depende del cuadrado de la velocidad, entonces si esta magnitud se duplica, la aceleración centrípeta será multiplicada por 4. Es decir $a_c = 4 \times 1.0\ cm/s^2 = 4.0\ cm/s^2$

Se debe observar que la aceleración centrípeta depende de la rapidez al cuadrado, es decir que si aumenta la rapidez de la partícula, manteniendo su radio constante, aumenta grandemente la aceleración centrípeta. Como esta varía con el inverso del radio de curvatura, implica que la aceleración centrípeta disminuye a medida que este radio aumenta, manteniendo la misma rapidez. Es por esta razón que se debe tener precaución cuando al conducir un automóvil entramos a una curva cerrada (curva de radio pequeño).

5.12 FUERZA CENTRÍPETA

De acuerdo a la segunda ley de Newton del movimiento, una fuerza neta produce una aceleración, o si existe una aceleración es porque debe existir una fuerza neta. Por lo tanto la fuerza denominada fuerza centrípeta es igual al producto de la masa por la aceleración centrípeta.

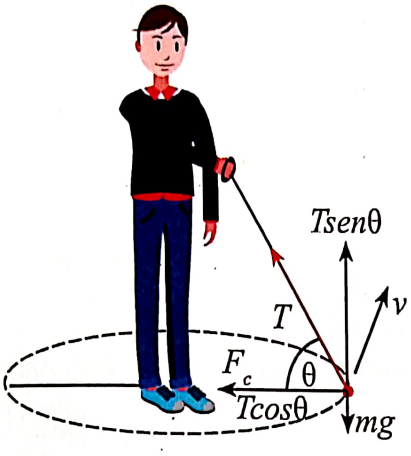


Figura 5.37

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{r} \qquad (5.27)$$

Esta fuerza centrípeta debe tener la misma dirección que la aceleración centrípeta, es decir, apunta hacia el centro de la trayectoria circular que describe la partícula. F_c es una fuerza resultante en el eje del radio de giro. En la figura 5.37 se observa a una persona que hace girar un objeto de modo que este ejecuta un movimiento circular uniforme en un plano horizontal. El análisis que se va a efectuar debe ser entendido por el lector muy profundamente. Como se puede pensar erróneamente, la tensión no representa la fuerza centrípeta sino la componente de la tensión F_c que está dirigida hacia el centro de la trayectoria circular (línea punteada) que describe el objeto.

De la figura se observa que la fuerza centrípeta es $F_c = T\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$. Por lo tanto cuando el ángulo θ se hace más pequeño el $\cos\theta$ se aproxima a 1 y solo en este caso la fuerza centrípeta es igual a la tensión en la cuerda. Como el objeto tiene masa implica que tiene peso el cual está dirigido hacia abajo, y la fuerza que equilibra el peso es igual a la otra componente de la tensión que está dirigida hacia arriba, esta fuerza es: $T\text{sen}\theta$.

Las ecuaciones correspondientes a la figura (5.37) son:

$T\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$ Esta es la fuerza centrípeta.

$T\,sen\theta = mg$

Ejemplo 5.17 - En la figura 5.37, suponga que la masa del objeto es de $m = 0.50\ kg$ y que la tensión T forma un ángulo de $\theta = 30°$ con el plano horizontal. Suponga que la longitud de la cuerda que sostiene el objeto es de $L = 5.0m$, calcule la rapidez v del objeto.

Solución

Usando la ecuación $T\text{sen}\theta = mg$ se puede calcular la tensión en la cuerda.

$$T = \frac{mg}{sen\theta} = \frac{0.50\ kg \times 10\ m/s^2}{sen30^0} = 10\ N$$

Despejando la velocidad de la ecuación: $T\cos\theta = m\frac{v^2}{r}$ donde $r = L\cos\theta$

$$v = \sqrt{\frac{Tr\cos\theta}{m}} = \sqrt{\frac{TL\cos\theta\cos\theta}{m}} = \sqrt{\frac{10\ N \times 5.0m \times cos30° \times cos30°}{0.50\ kg}} = 8.66\ m/s$$

Ejemplo 5.18 - Un automóvil entra en una curva de 100 metros de radio de curvatura y el coeficiente de fricción estático entre las llantas del automóvil y el pavimento es de 0.90. Calcule la velocidad máxima que debe tener el automóvil para no deslizar.

Solución

Cuando el automóvil entra en la curva es la fuerza de fricción estática la que le proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que pueda realizar la curva. Esta fuerza de fricción limitará la rapidez máxima que pueda tomar

el auto. Se utiliza la fuerza de fricción estática y no la fuerza de fricción cinética porque el automóvil no desliza en la dirección radial desde el punto de vista del conductor. Así, la fuerza de fricción estática será:

$$\mu_s mg = m\frac{v^2}{r} \qquad v = \sqrt{\mu_s gr} = \sqrt{0.90 \times 10\ m/s^2 \times 100m} = 30\ m/s$$

Si el auto excede esta rapidez mientras entra en la curva, el automóvil deslizará sobre la calzada y se desplazará a lo largo de la tangente de la curva. Con el fin de no confiar la curva completamente a la fuerza de fricción estática, los constructores de carreteras deben peraltar la vía con el fin de dar seguridad en las curvas que toman los automotores. Es muy notorio que las pistas en donde hay competencias automovilísticas las curvas son peraltadas como se observará en la sección siguiente.

5.13 PERALTE EN LAS CURVAS

Cuando un auto rueda sobre una carretera y entra a una curva, la fricción juega un rol muy importante, ya que hace el papel de la fuerza centrípeta que el auto requiere para poder girar. Sin embargo, uno no se puede fiar de la fricción ya que el piso puede estar resbaloso porque se ha regado aceite, ha llovido, o las llantas son lisas y no tienen buen agarre con la carretera, etc.

Por esta razón, en las curvas, las carreteras son peraltadas. El camino tiene una inclinación que forma un ángulo θ con la horizontal. De esta manera, es la componente de la normal la que hace el papel de fuerza centrípeta aunque la fricción sea despreciable. La normal es una fuerza que es perpendicular a la carretera como se observa en la figura 5.38.

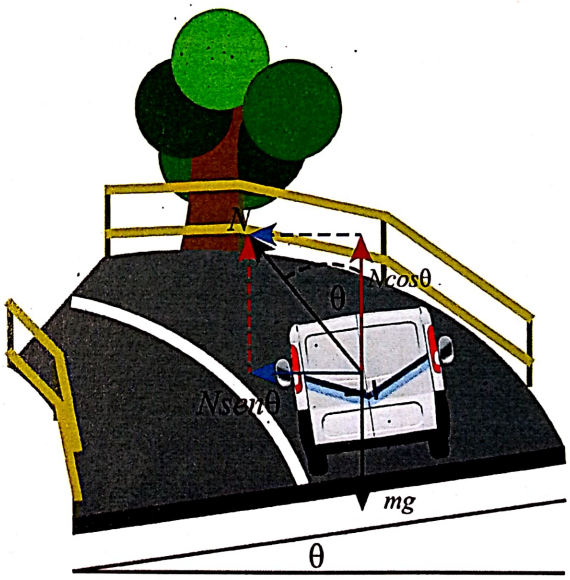


Figura 5.38

Como el carro de masa m no se mueve en la dirección vertical entonces la suma de fuerzas en esa dirección debe ser igual a cero. Por lo tanto:

$$N\cos\theta - mg = 0$$

$$N\cos\theta = mg \qquad (5.28)$$

Del gráfico de la figura 5.38 debe notarse que solo existe un vector que apunta hacia el centro de la trayectoria circular.

Este vector es una de las componentes de la fuerza normal y debe notarse que si la carretera fuera horizontal, la fuerza normal sería vertical y no existiría ninguna componente en la dirección radial (hacia el centro de la trayectoria circular).

Por lo tanto la componente $N\text{sen}\theta$ es la fuerza centrípeta necesaria para que el auto gire por la curva. Nótese que no se ha incluido la fuerza de fricción estática. Por lo tanto:

$$N\text{sen}\theta = m\frac{v^2}{r}$$

Dividiendo esta ecuación para la ecuación 5.28 se tiene: $\frac{N\text{sen}\theta}{N\cos\theta} = \frac{m\frac{v^2}{r}}{mg}$

Se cancela la masa m del vehículo y también la fuerza normal. Y escribiendo $\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ quedaría:

$$v = \sqrt{gr\tan\theta} \qquad (5.29)$$

De esta ecuación se deduce que si el radio de curvatura es grande, la velocidad con que entra un auto en una curva puede ser grande. De igual forma, si se desea que la velocidad sea grande, el ángulo de peralte debe ser grande. Se insiste en que esta velocidad podría ser superada de este valor ya que la fricción colabora

con la fuerza centrípeta. Sin embargo por razones de seguridad no se ha considerado a la fuerza de fricción porque como se dijo en líneas anteriores, si el pavimento está mojado, se ha regado aceite o las llantas están lisas la fuerza de fricción sería despreciable y el carro podría deslizar sobre la calzada.

Ejemplo 5.19 - En una de las salidas de la autopista Perimetral en la ciudad de Guayaquil existe una señal que indica que la máxima velocidad en la salida no debe exceder de 20 m/s. Si el radio de curvatura es de 300 m, calcule el ángulo de peralte que debe existir en la salida.

Solución: De la ecuación $v = \sqrt{gr\tan\theta}$ se tiene que despejar θ que es el ángulo de peralte.

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gr} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left[\frac{(20\ m/s)^2}{10 m/s^2 \times 300 m}\right] \Rightarrow \theta = 7.6^{\circ}$$

5.14 MOVIMIENTO CIRCULAR VERTICAL

A diferencia del movimiento circular uniforme que se ha estudiado hasta este momento, el movimiento vertical es uno circular en el que la velocidad varía tanto en magnitud como en dirección. Por ejemplo, suponga que se tiene una pista circular de radio R y una masa se desliza a lo largo de la pista; cuando el objeto está en su camino hacia arriba la rapidez disminuye conforme sube, mientras que cuando el objeto está en su camino hacia el punto inferior la rapidez aumenta.

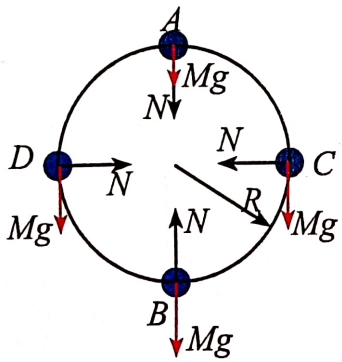


Figura 5.39

Otra diferencia es que el peso juega un papel importante cuando el objeto se encuentra en cualquier punto de la pista.

Con respecto a la figura 5.39, se analizarán cuatro puntos que son: A, B, C, D. Debe notarse que la rapidez en el punto A es diferente a la del punto B. Tomando en consideración que la fuerza centrípeta es la suma de todas las fuerzas en dirección radial, empezaremos con el punto A.

En el punto A está actuando el peso mg hacia abajo y la fuerza que la pista ejerce sobre el objeto N, también hacia abajo.

Por lo tanto la fuerza centrípeta es $N+Mg$, en este caso el peso colabora con la fuerza centrípeta.

En el punto B el peso está alejándose del centro de la trayectoria circular (está hacia abajo) y la reacción de la pista sobre el objeto es hacia arriba. Tomando en cuenta que las fuerzas que se dirigen hacia el centro de la trayectoria circular son positivas se tiene que la fuerza centrípeta en el punto B es: $N - Mg$.

En los puntos C y D, el peso no contribuye ni a favor ni en contra de la fuerza centrípeta porque no tiene ninguna componente en la dirección radial; por lo tanto, en estos puntos la fuerza que realiza la pista sobre el objeto N es la fuerza centrípeta. Resumiendo:

Punto A: $N + Mg = M\frac{v_A^2}{R}$ (5.30)

Punto B: $N - Mg = M\frac{v_B^2}{R}$ (5.31)

Punto C: $N = M\frac{v_C^2}{R}$ (5.32)

Punto D: $N = M\frac{v_D^2}{R}$ (5.33)

Además existe otro tema importante de analizar y es aquel en que el objeto debe tener una velocidad mínima en el punto A para que pueda describir la circunferencia. De hecho esa velocidad mínima en el punto más alto de la trayectoria no es cero. En el punto A la velocidad mínima es cuando no existe una fuerza que la pista ejerza sobre el objeto; en este caso es el peso el que hace el papel de la fuerza centrípeta.

Esto es: Si $N = 0$ en el punto A, entonces: $Mg = M\dfrac{v^2_{min}}{R}$ $\quad v_{min} = \sqrt{gR}$

Si la velocidad del objeto es menor a la velocidad mínima, este se desprenderá de la pista antes de llegar al punto A y su trayectoria será la de un cuerpo libre que se mueve bajo el efecto de la aceleración de la gravedad. La fuerza que la pista ejerce sobre el objeto en el punto C de la figura 5.39 ¿será igual o diferente a la fuerza que la pista ejerce sobre el objeto en el punto D? Se deja al lector para que responda esta pregunta.

Ejemplo 5.20 - En un parque de diversiones, un carrito y sus pasajeros tienen una masa total de 500 kg y se encuentra en la parte más alta de un juego llamado "la montaña rusa".

El carrito tiene una rapidez de 25 m/s en el punto B de la figura 5.40.

a) Calcule la reacción de la pista en el punto B

b) La mínima velocidad que debe tener para no salirse de la pista en el punto C.

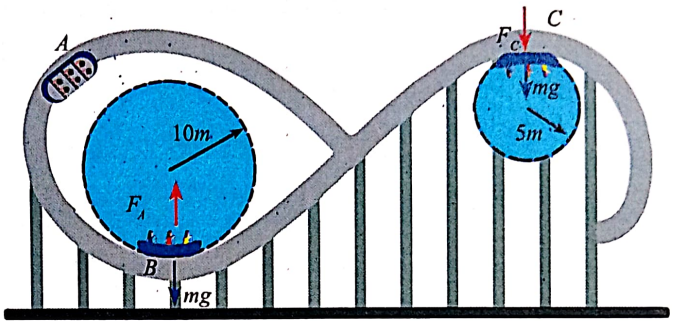


Figura 5.40

Solución

a) Cuando el carrito está en el punto B experimenta dos fuerzas: una es el peso mg y otra es la fuerza que la pista ejerce sobre el carrito y está dirigida hacia arriba (F_A). Esta fuerza debe ser mayor al peso para que exista una fuerza neta dirigida hacia el centro de la trayectoria circular en el punto B. Por lo tanto, la sumatoria de todas las fuerzas actuando en el punto B es igual a la fuerza centrípeta.

$$\sum Fradial = F_A - mg = m\frac{v_B^2}{r}$$

Despejando F_A queda: $$F_A = m\left(\frac{v_B^2}{r} + g\right) \qquad (5.34)$$

Reemplazando los datos: $m = 500kg$; $v_B = 25m/s$; r $=10m$; $g = 10m/s^2$ se tiene:

$$F_A = 500kg\left[\frac{(25\ m/s)^2}{10\ m} + 10m/s^2\right] \qquad F_A = 36250\ N$$

Esta es la fuerza que la pista ejerce sobre el carrito en el punto B.

b) Para calcular la mínima rapidez del carrito en el punto C, la fuerza centrípeta debe ser igual al peso del carrito, y por lo tanto la fuerza que la pista ejerce sobre éste debe ser igual a cero. Imagínese que el carrito está en el punto C a punto de salirse de la pista, por lo tanto ésta no está ejerciendo ninguna fuerza sobre el carrito. Así, la sumatoria de todas las fuerzas en el punto C debe ser igual a la fuerza centrípeta. Note que en este punto $F_C = 0$.

$$\sum F_{radial} = m\frac{v_C^2}{r}$$

La única fuerza en dirección radial en el punto C es el peso, por lo tanto: $mg = m\dfrac{v_C^2}{r}$

Despejando la rapidez v: $v_c = \sqrt{gr}$

Reemplazando los datos: $g = 10\ m/s^2$; $r = 5m$ se tiene: $v_c = \sqrt{10\ m/s^2 \times 5m} = 7.1\ m/s$

Si la rapidez del carrito al pasar por el punto C es menor a este valor, se saldrá de la pista.

Ejemplo 5.21 - Con referencia al "ejemplo 5.20", ¿es posible que el carrito experimente una fuerza vertical igual a su peso en el punto B y aún se mantenga sobre la pista?

Solución: Si ese fuera el caso la fuerza centrípeta sería cero y por lo tanto sería imposible que el carrito pudiera describir una trayectoria circular. Así, la reacción que ejerce la pista sobre el carrito en el punto B debe ser mayor al peso.

Ejemplo 5.22 - En los parques de diversiones hay un juego llamado "rotor" o "centrífuga" que consiste en colocarse hacia la pared de un gran cilindro, el cual rota con cierta rapidez angular. La persona se halla parada sobre un piso el mismo que es retirado cuando el cilindro alcanza cierta velocidad.

¿Cuál debe ser la rapidez tangencial del filo del cilindro para que la persona esté a punto de resbalar? Suponga que el coeficiente de rozamiento estático entre la pared y la espalda de la persona es de 0.5 y que el radio del cilindro que gira es de 5.0 metros.

Figura 5.41

Solución

Las fuerzas que actúan sobre la persona son el peso mg, la fuerza de rozamiento estática f_s y la fuerza que la pared cilíndrica ejerce sobre la persona.

Por lo tanto, la fuerza de rozamiento es la que sostiene a la persona. Además, la fuerza de rozamiento es igual al peso. Debido a que la fuerza f_s es directamente proporcional a la normal, mientras mayor sea la rapidez de rotación del rotor, mayor será la normal. Sin embargo, nunca la fuerza de fricción será mayor al peso de la persona.

Lo que sucedería, en caso de que la velocidad de rotación se incrementara, es que la persona no estaría a punto de resbalar ya que la fricción de rozamiento estática máxima se ha incrementado. Se debe puntualizar de que la fuerza de rozamiento nunca va a ser mayor que el peso de la persona, pero la fuerza de rozamiento estática máxima si puede ser mayor que el peso. Entonces, la única fuerza que está dirigida hacia el centro de rotación es la normal. Así, la sumatoria de fuerzas en dirección radial es la fuerza normal la cual es igual a la fuerza centrípeta.

$$\sum F_{radial} = m\frac{v^2}{r} \quad \rightarrow \quad N = m\frac{v^2}{r}$$

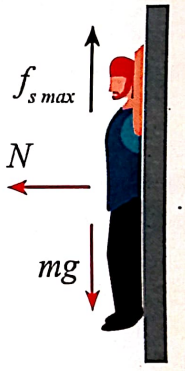


Figura 5.42

La fuerza de rozamiento estático se define como:	$f_{s\,max} = \mu_s N \qquad N = \frac{f_{s\,max}}{\mu_s}$
Haciendo sumatoria de fuerzas en la dirección vertical se encuentra que:	$\sum F_y = 0 \qquad f_{s\,max} = mg \qquad N = \frac{mg}{\mu_s}$
Reemplazando el valor de la normal se obtiene:	$\frac{mg}{\mu_s} = m\frac{v^2}{r}$
Observe que la masa se cancela, y despejando v:	$v = \sqrt{\frac{gr}{\mu_s}}$
Reemplazando los valores dados en el problema se obtiene:	$v = \sqrt{\frac{10\ m/s^2 \times 5.0\ m}{0.5}} \qquad v = 10\ m/s$

Si por alguna razón esta rapidez se reduce, disminuirá el valor de la normal y por ende disminuirá la fuerza de fricción, y al reducir esta será menor que el peso y la persona deslizará hacia abajo. Por esta razón, en el rotor que se encuentra en los parques de diversiones la persona es sujetada con cinturones de seguridad. Por seguridad del público los rotores se mueven a velocidades mayores que las calculadas en este ejercicio.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Primera Ley de Newton y sistema de referencia inercial

Actividad 5.1

Ordene de mayor a menor los siguientes objetos en base a su inercia.

a) Un tren con 20 vagones.

b) Un bus de pasajeros.

c) Un mosquito.

d) Un pájaro.

e) Tu libro de Física.

f) Un automóvil para 5 personas.

Actividad 5.2

De la definición de inercia, escoja la alternativa correcta.

a) Inercia es la propiedad que tienen los cuerpos de oponerse al cambio de su estado de reposo o de movimiento con velocidad constante.

b) Inercia es la fuerza que poseen los cuerpos debido a su masa.

c) Inercia es la propiedad que tienen los cuerpos que hace que los cuerpos más masivos posean alta aceleración.

d) Inercia sólo es aplicable durante el choque entre dos o más objetos.

e) Inercia es análoga a aceleración.

Actividad 5.3

Sistema de referencia inercial es aquel que:

a) Se mueve solamente en círculos.

b) Se mueve con aceleración constante.

c) Se mueve con velocidad constante o se encuentra en reposo.

d) Se mueve solo en la dirección horizontal ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda.

e) Se mueve con rapidez constante pero a lo largo de una circunferencia de radio r.

Actividad 5.4

El siguiente gráfico, ¿representa un correcto diagrama de cuerpo libre de un cuerpo en reposo?

Si el gráfico está incorrecto, ¿cuál es el error y qué se debe cambiar para corregirlo?

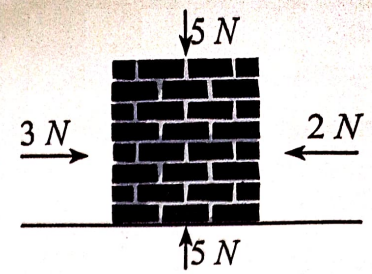


Figura 5.43

Segunda Ley de Newton

Actividad 5.5

¿Puede un objeto tener un movimiento vertical hacia la superficie de la Tierra y que su aceleración sea diferente al de la aceleración de la gravedad? Explique.

Actividad 5.6

¿Será posible que la fuerza resultante (neta) sea cero y que la partícula estuviera en movimiento? Explique su respuesta.

Actividad 5.7

¿Es posible que exista alguna relación entre la fuerza que se ejerce sobre una partícula y su dirección del movimiento? Explique su respuesta.

Actividad 5.8

Si dos bloques de masas diferentes se sueltan desde el reposo en caída libre y desde una misma altura, se sabe que llegan al suelo al mismo tiempo. ¿Cómo es posible esto si la fuerza gravitacional es mayor sobre el cuerpo de mayor masa? Explique su respuesta.

Actividad 5.9

De la segunda ley de Newton se obtiene la expresión $\vec{F} = m\vec{a}$, donde $\vec{F}$ es la fuerza resultante, m es la masa, y $\vec{a}$ es la aceleración resultante. De las siguientes alternativas indique la correcta.

a) En algunos casos $\vec{F}$ no tiene la misma dirección que $\vec{a}$.

b) La fórmula $\vec{F} = m\vec{a}$ solo es válida si la masa es constante.

c) En el movimiento circular con rapidez constante la fuerza resultante es igual a cero.

d) En el movimiento de proyectiles, la fuerza resultante es tangente a la trayectoria.

e) De la expresión $\vec{F} = m\vec{a}$, la fuerza resultante puede ser cualquier fuerza pero nunca la fricción.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.10

En líneas anteriores se definió a la fuerza como la rapidez de variación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula. En virtud de esto, ¿cuáles son las unidades de la cantidad de movimiento en el Sistema Internacional de Unidades?

Actividad 5.11

¿Dónde es más fácil acelerar un objeto: sobre una superficie horizontal sin fricción en la Tierra o sobre una superficie horizontal sin fricción en la Luna? La aceleración de la gravedad en la Luna es aproximadamente la sexta parte de la aceleración de la gravedad en la Tierra.

Actividad 5.12

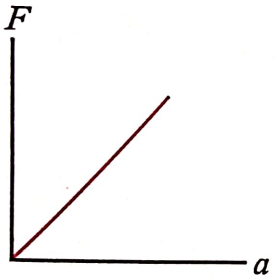
Un cuerpo de masa m (kg) tiene una aceleración a (m/s^2) y experimenta una fuerza $F(N)$. Si la fuerza F se cuadruplica. ¿Qué pasa con su aceleración?

Actividad 5.13

Un cuerpo en la superficie de la Tierra pesa $120\ N$. ¿Cuál es la masa del cuerpo en la superficie lunar?

Actividad 5.14

La gráfica F vs a de cierto cuerpo en la superficie terrestre es:



Dos personas se encuentran en una gran discusión, la persona A dice: "cuando el cuerpo vaya al planeta Marte la gráfica debe ser menos inclinada", pero la persona B no está de acuerdo y dice: "cuando el cuerpo esté en Marte la gráfica debe ser más inclinada". ¿Cuál de las personas está en lo correcto?

Actividad 5.15

Se tienen 3 bloques $m_1 = 5.0\ kg$, $m_2 = 10.0\ kg$ y $m_3 = 5.0\ kg$ atados entre sí y se les aplica una fuerza de $100\ N$ tal como se muestra en la figura 5.44:

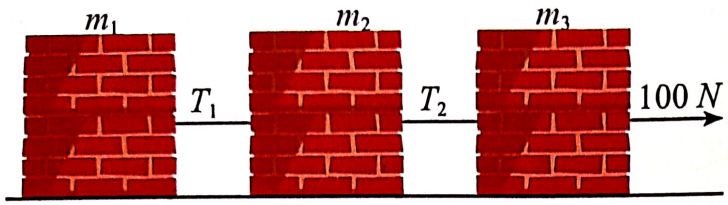


Figura 5.44

a) Realice el diagrama de cuerpo libre de cada bloque.

b) Determine la aceleración del sistema.

c) Determine la tensión T_1 y la tensión T_2.

Actividad 5.16

Una persona se encuentra parada en una balanza dentro de un ascensor que se mueve hacia arriba con velocidad constante, mientras se mueve la balanza marca $1000\ N$. Ver figura 5.45

Despues el ascensor se mueve hacia arriba con una aceleración de $2\ m/s^2$, ¿Cuál será la nueva lectura de la balanza?.

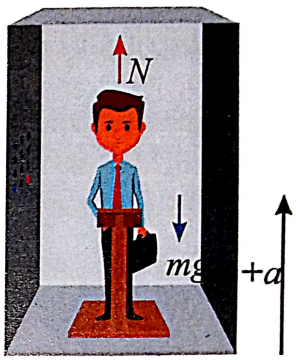


Figura 5.45

Actividad 5.17

Se tienen 3 bloques $m_1 = 10kg$, $m_2 = 20\ kg$ y $m_3 = 10kg$ y se les aplica una fuerza de $120\ N$ tal como se muestra en la figura 5.46:

a) Realice el diagrama de cuerpo libre de cada bloque.

b) Determine la aceleración del sistema.

c) Determine la fuerza que ejerce el bloque m_3 sobre el bloque m_2.

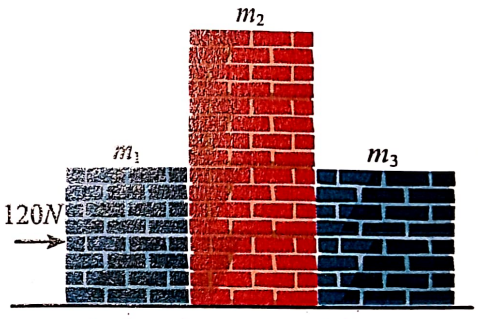


Figura 5.46

Actividad 5.18

Se tienen 3 bloques $m_1 = 5.0\ kg$, $m_2 = 10.0\ kg$ y $m_3 = 15.0\ kg$. El siguiente sistema se suelta desde el reposo:

a) Realice el diagrama de cuerpo libre de cada bloque.

b) Determine la aceleración del sistema.

c) Calcule las tensiones T_1, T_2 y T_3.

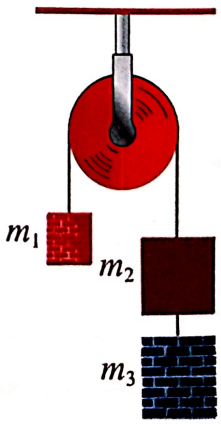


Figura 5.47

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.19

Se tienen 3 bloques m_1, m_2 y m_3, sobre una superficie lisa, se les aplica una fuerza F, tal como se muestra en la figura 5.48, ¿en cuál de los siguientes arreglos, el bloque m_2 realiza una mayor fuerza de contacto sobre m_3.

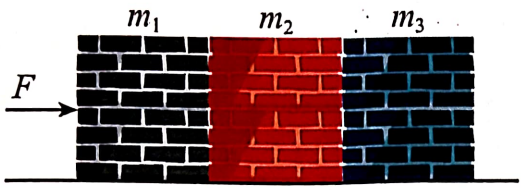


Figura 5.48

	m_1	m_2	m_3
a)	$1m$	$3m$	$2m$
b)	$1m$	$4m$	$1m$
c)	$3m$	$2m$	$1m$
d)	$2m$	$1m$	$3m$
e)	$1m$	$1m$	$4m$

Actividad 5.20

Dado el siguiente gráfico:

a) Realice el diagrama de cuerpo libre de cada bloque.

b) Determine la aceleración del sistema.

c) Encuentre la tensión de la cuerda.

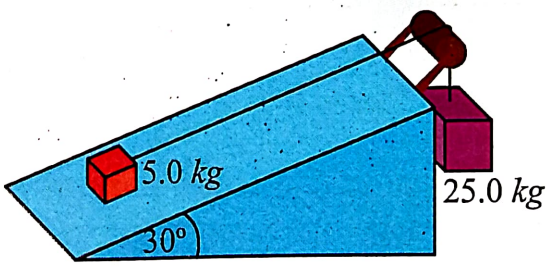


Figura 5.49

Tercera Ley de Newton y diagramas de cuerpo libre

Actividad 5.21

Un camión grande choca con un auto pequeño. En esta colisión, ¿cuál de ellos experimenta la mayor fuerza? Explique su respuesta.

Actividad 5.22

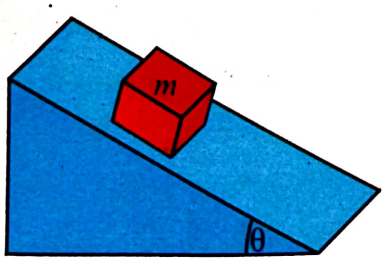


Figura 5.50

Un bloque de masa m se halla en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ arriba de la horizontal. De acuerdo al diagrama de cuerpo libre correspondiente, se puede afirmar que la magnitud de la fuerza total que el plano inclinado ejerce sobre el bloque es:

a) $mgsen\theta$ b) Igual al peso del bloque.

c) La fuerza normal. d) La fuerza de fricción estática.

e) La fuerza de fricción cinética.

Actividad 5.23

Un bloque de masa m se halla en reposo sobre la superficie de un plano inclinado que forma un ángulo θ con la horizontal. Indique cuál de las siguientes alternativas es un correcto diagrama de cuerpo libre.

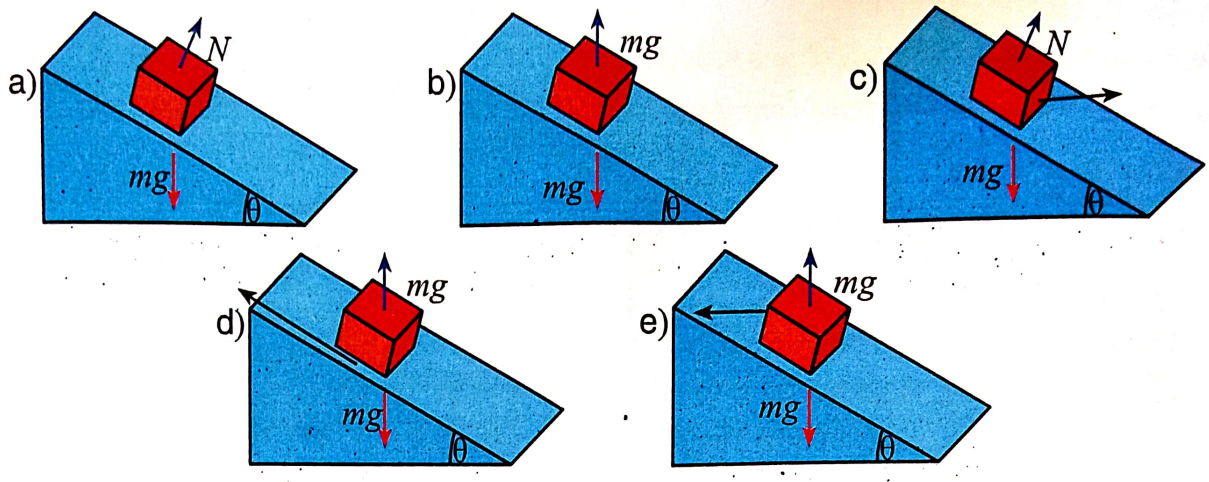


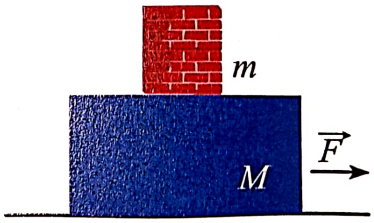
Figura 5.51

Actividad 5.24

Un bloque de masa m se halla sobre otro bloque de masa M. Los dos bloques se mueven hacia la derecha por medio de una fuerza constante horizontal $\vec{F}$.

Suponga que el boque de masa m no desliza sobre el bloque de masa M, como se muestra en la figura.

El coeficiente de rozamiento estático entre los dos bloques es μ_s. El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque de masa M y el piso es μ_k. El diagrama de cuerpo libre del bloque de masa M es:



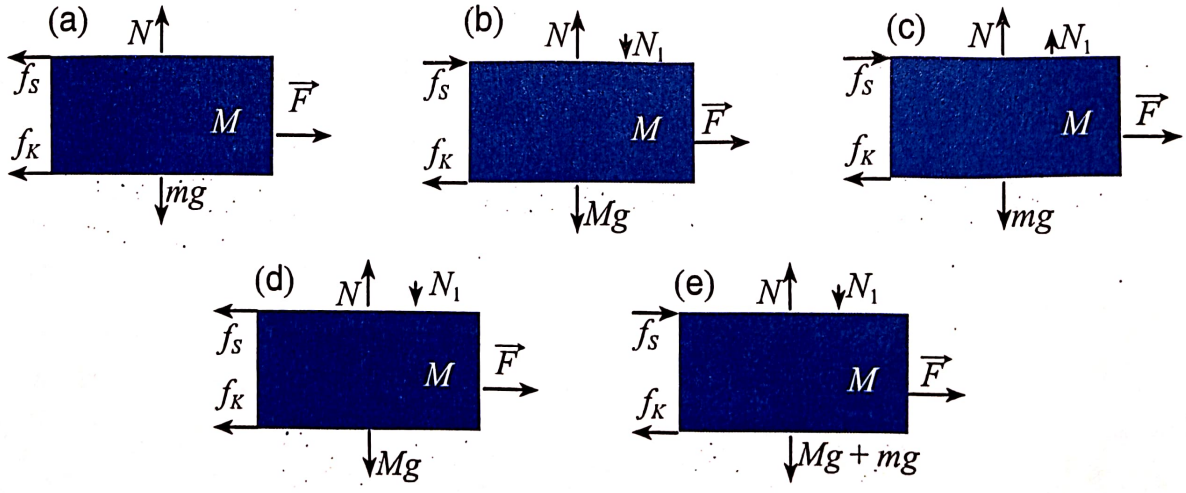


Figura 5.52

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.25

Para la misma figura del problema anterior se puede pedir que se realice el diagrama de cuerpo libre del bloque de masa m.

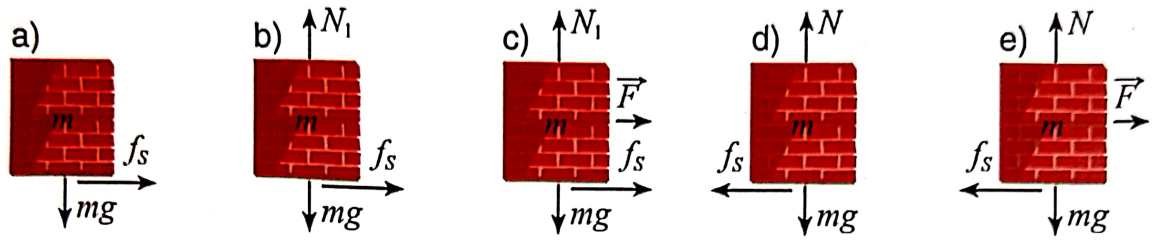


Figura 5.53

Actividad 5.26

Un objeto de masa m, se mueve hacia la derecha sobre una superficie horizontal rugosa con velocidad constante. El coeficiente de rozamiento cinético entre el objeto y la superficie es μ_k. Entonces, el diagrama de cuerpo libre de este objeto es:

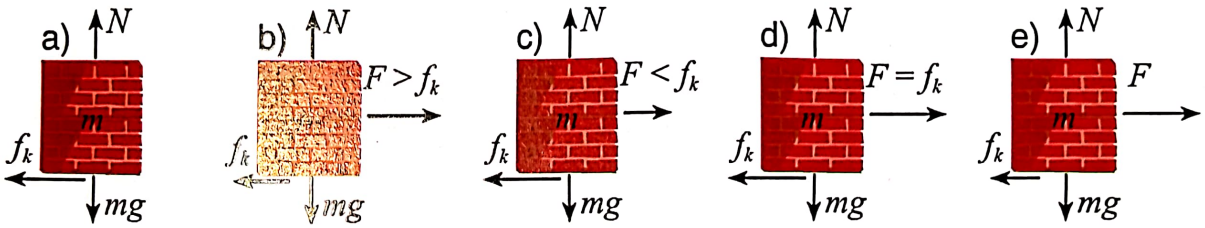


Figura 5.54

Actividad 5.27

Tres bloques de masas m_1, m_2 y m_3. son empujados por una fuerza horizontal $\vec{F}$ como se muestra en la figura. Suponga que los coeficientes de rozamiento cinético entre el plano y los bloques son μ_{k1}, μ_{k2} y μ_{k3} respectivamente, entonces el diagrama de cuerpo libre del bloque de masa m_2 es: (F_c representa la fuerza de contacto)

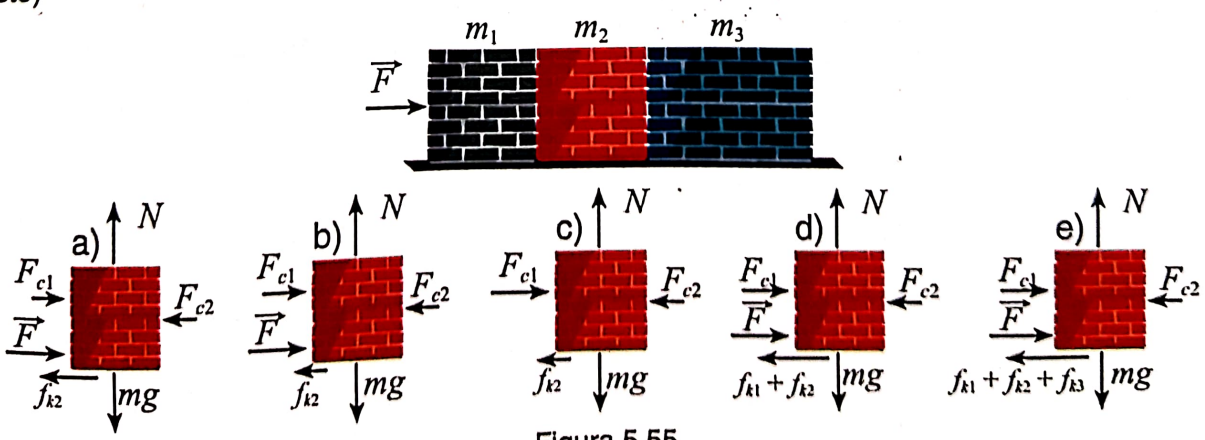


Figura 5.55

Actividad 5.28

¿Cuál es la dirección de la fuerza de rozamiento que actúa sobre el zapato de una persona, que camina sobre una superficie horizontal? ¿La fuerza de rozamiento es estática o cinética? Explique.

Figura 5.56

Actividad 5.29

Un bloque de masa m se encuentra en reposo sobre una mesa horizontal. Su diagrama de cuerpo libre consta del peso del bloque (mg) y de la normal (N). Estas dos fuerzas suman cero porque son de igual magnitud pero tienen dirección contraria. ¿Son el peso y la normal un par acción- reacción? Explique.

Actividad 5.30

Un bloque de masa $m_1 = 4.0kg$ está atado por medio de una cuerda que pasa por una polea sin fricción a otro bloque de masa $m_2 = 2.0kg$ que cuelga del otro extremo.

Si el bloque de masa m_1 se desliza sobre una superficie horizontal y sin fricción, como se muestra en la figura 5.57, determinar la aceleración de los bloques.

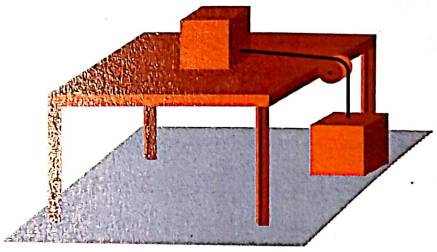


Figura 5.57

Actividad 5.31

Una fuerza $\vec{F} = 100N$, dirigida hacia la izquierda, se aplica sobre el bloque de masa $m_1 = 10kg$, el mismo que está en contacto con otro bloque de masa $m_2 = 15kg$ como se muestra en la figura 5.58.

Suponga que los bloques se encuentran sobre una superficie sin fricción. Determinar la magnitud de la fuerza de contacto que m_1 ejerce sobre m_2.

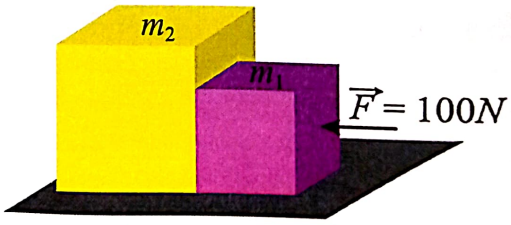


Figura 5.58

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.32

Un hombre de $60\ kg$ viaja parado sobre una balanza la cual se encuentra en el piso de un ascensor que baja a velocidad constante. De las siguientes proposiciones, indique la correcta. Ver figura 5.59

a) El peso que lee la balanza es $60\ N$

b) El peso que lee la balanza es menor a $600\ N$.

c) El peso que lee la balanza es igual a $600\ N$.

d) El peso que lee la balanza es mayor a $600\ N$.

e) Como el ascensor es un sistema de referencia inercial, no es posible determinar la lectura de la balanza.

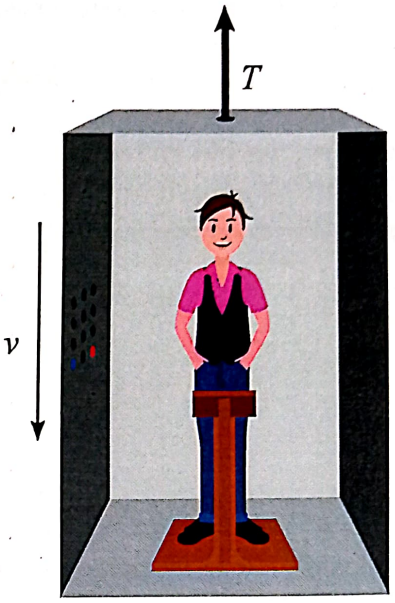


Figura 5.59

Actividad 5.33

Del techo de un elevador de $350\ kg$ de masa se cuelga un bloque de $50\ kg$ por medio de una cuerda como se muestra en la figura 5.60.

Si el elevador se mueve hacia arriba con aceleración constante, ¿cuál es la fuerza $\vec{F}$ en la cuerda que sostiene al elevador para que la tensión en la cuerda que sostiene al bloque sea de $600\ N$?

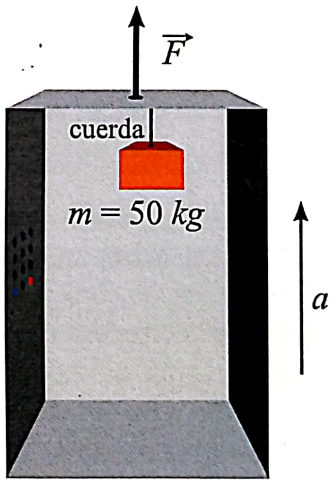


Figura 5.60

Actividad 5.34

Un bloque de $2.0\ kg$ de masa se halla sobre un plano horizontal donde los coeficientes de fricción estático y cinético son de 0.5 y 0.2 respectivamente. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ sobre el bloque para que esté a punto de salir del movimiento.

Una vez puesto en movimiento y manteniendo la misma fuerza $\vec{F}$ el bloque se desplaza hacia la derecha durante $10\ s$. Si el bloque parte del reposo, calcular su velocidad al cabo de los $10\ s$.

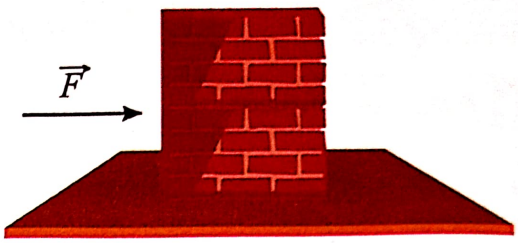


Figura 5.61

Actividad 5.35

El coeficiente de fricción estática entre un bloque de $5.0\ kg$ de masa y el plano horizontal sobre el que se halla el bloque es de 0.5.

El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano es de 0.3. Una vez que el bloque ha sido puesto en movimiento, ¿cuál es la fuerza horizontal que se debe aplicar para que el bloque continúe moviéndose con velocidad constante?

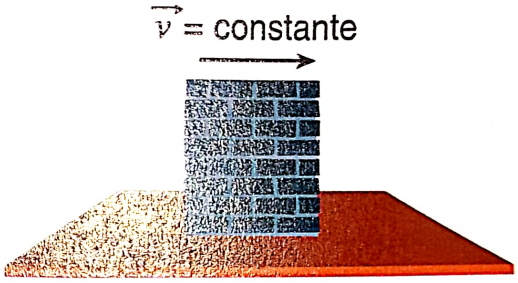


Figura 5.62

Actividad 5.36

Una prestigiosa empresa de zapatos deportivos ha diseñado y fabricado una nueva marca de zapatos llamados MF. Los zapatos van a ser probados por un deportista de amplia trayectoria, el cual correrá sobre una pista en línea recta, los coeficientes de rozamiento cinético y estático entre los zapatos y la pista son $\mu_k = 0.35$ y $\mu_s = 0.80$, respectivamente. Se pide:

a) Realizar un diagrama de cuerpo libre del deportista.

b) Determinar la máxima aceleración que puede desarrollar el deportista usando estos zapatos.

Figura 5.63

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.37

Desde lo alto de un plano inclinado sin fricción se suelta, desde el reposo, un bloque, el cual se desliza a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo de $30°$ con la horizontal.

El bloque recorre una distancia de $10.0\ m$ de longitud a lo largo del plano. Determinar la velocidad del bloque después de recorrer la distancia de $10.0\ m$.

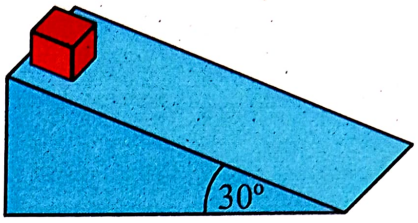


Figura 5.64

Actividad 5.38

Desde lo alto de un plano inclinado se suelta, desde el reposo, un bloque el cual se desliza a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo de $30°$ con la horizontal.

El bloque recorre una distancia de $10.0\ m$ de longitud a lo largo del plano. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el plano y el bloque es 0.40, ¿cuál será la velocidad del bloque después de recorrer la distancia de $10.0\ m$?

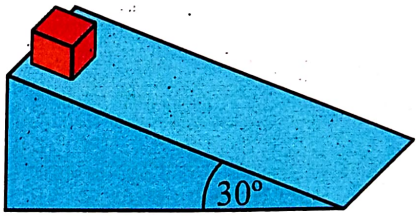


Figura 5.65

Actividad 5.39

Si el bloque se desliza hacia abajo, a lo largo del plano inclinado, calcule el valor de la fuerza $\vec{F}$, paralela al plano, que debe aplicarse al bloque para que este se mueva con velocidad constante, conociendo el coeficiente de fricción cinético entre el bloque y el plano es de $1/\sqrt{3}$.

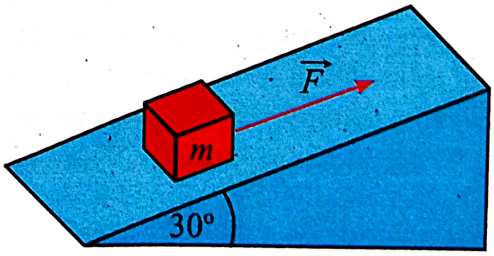


Figura 5.66

Actividad 5.40

Un objeto desliza a lo largo de un plano inclinado con fricción el cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. La aceleración del objeto puede ser:

a) $4.0\ m/s^2$ b) $5.0\ m/s^2$ c) $6.0\ m/s^2$

d) $8.0\ m/s^2$ e) $10.0\ m/s^2$

Actividad 5.41

Dos bloques de masas $m_1 = 2.0\ kg$ y $m_2 = 3.0\ kg$ parten desde el reposo a lo largo de un plano liso como se muestra en la figura 5.68. Se pide determinar:

a) La aceleración del sistema

b) La tensión de la cuerda

c) La velocidad de impacto del bloque m_2 contra el resorte.

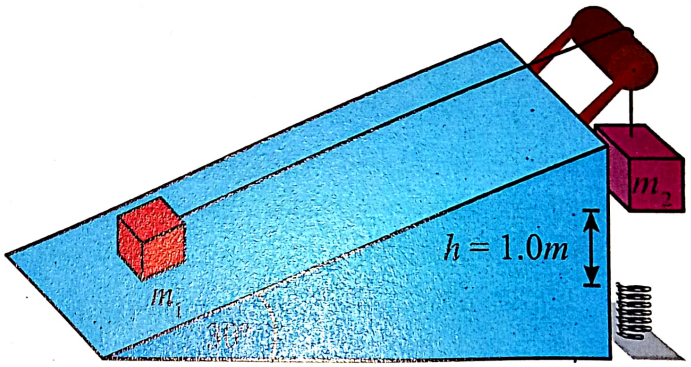


Figura 5.67

Actividad 5.42

Un objeto de $10.0\ kg$ de masa se halla sobre un plano inclinado sin fricción y se acelera constantemente a $3.0\ m/s^2$ hacia abajo a lo largo del plano inclinado el cual forma un ángulo de 30° con la horizontal. Determinar la fuerza $\vec{F}$ que se requiere para lograr este objetivo.

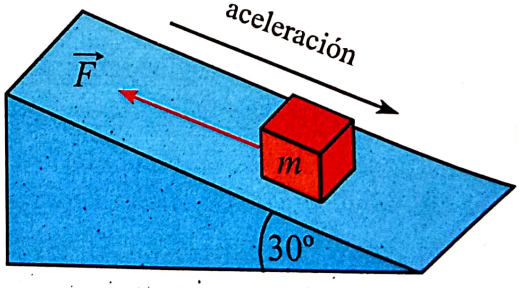


Figura 5.68

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.43

Un bloque de masa m_1 se halla sobre un plano inclinado rugoso donde el coeficiente de rozamiento cinético es de 0.2. Este bloque está unido por medio de una cuerda a otro bloque de masa m_2 que cuelga como se muestra en la figura. Si la aceleración de los bloques es de $1.5\ m/s^2$. ¿Cuál es la relación de las masas m_1/m_2?. Suponga que el sistema se mueve en sentido horario.

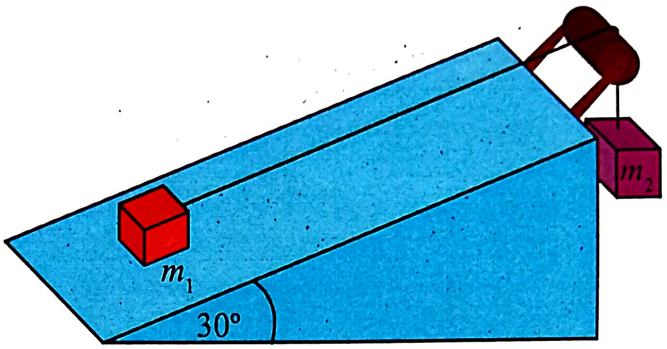


Figura 5.69

Actividad 5.44

Se lanza un bloque de masa m con velocidad inicial de $10.0\ m/s$ en una superficie rugosa y se detiene después de recorrer $20.0\ m$.

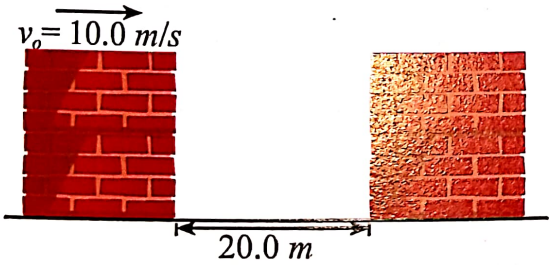


Figura 5.70

a) Realice el diagrama del cuerpo libre del bloque.

b) Determine la aceleración del bloque.

c) Determine el coeficiente de rozamiento cinético.

d) Si la masa es $m = 10.0\ kg$, determine la fuerza de fricción cinética.

Actividad 5.45

¿Cuál de los siguientes bloques de $1.0\ kg$ o $10.0\ kg$, tiene mayor aceleración?, justifique su respuesta.

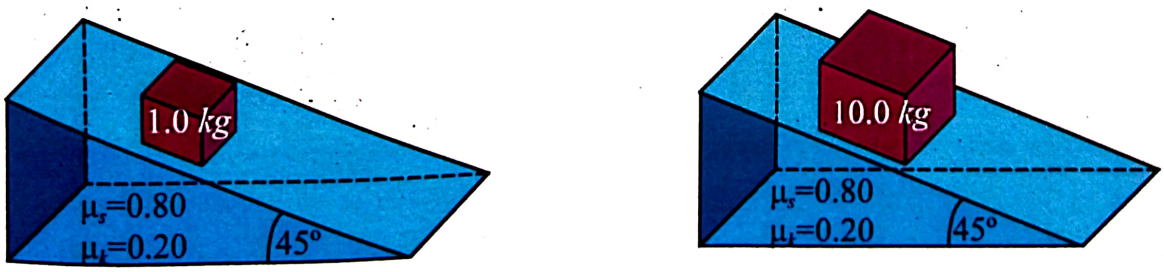


Figura 5.71

Actividad 5.46

¿Cuál de los siguientes bloques de $1.0\ kg$ o $10.0\ kg$, resbala?, justifique su respuesta.

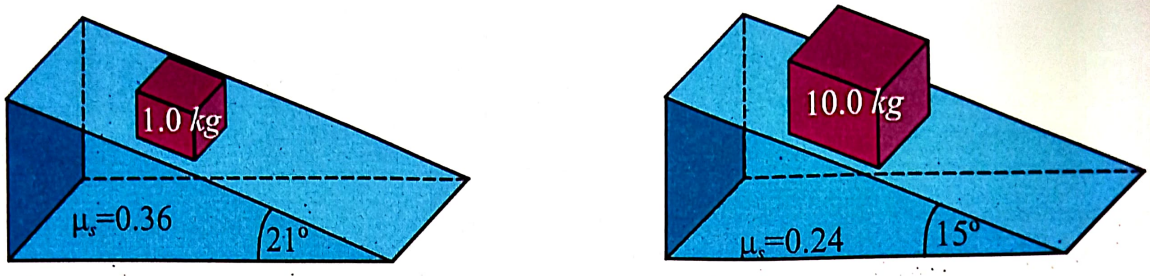


Figura 5.72

Actividad 5.47

¿Cuál de los siguientes bloques de $1.0\ kg$ o $10.0\ kg$, resbala y cuál tiene mayor aceleración?

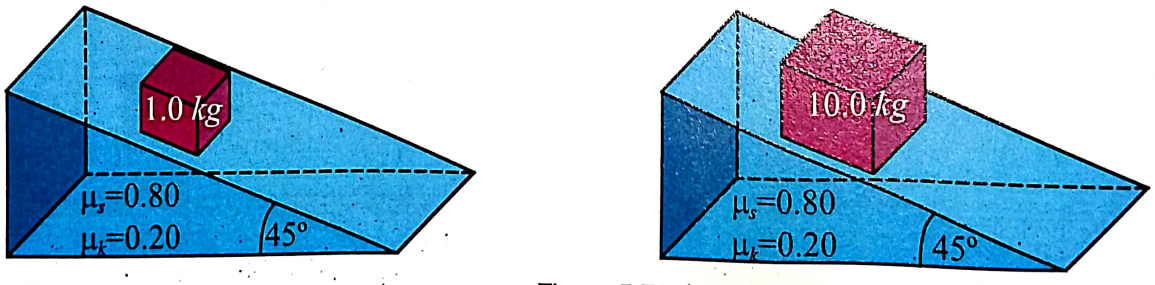


Figura 5.73

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.48

¿Cuál de los siguientes bloques de $1.0\ kg$ o $10.0\ kg$, resbala?

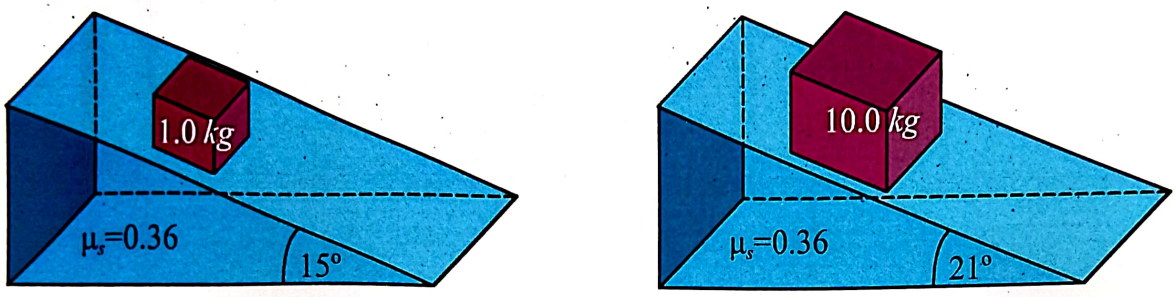


Figura 5.74

Actividad 5.49

Un bloque de masa igual $10.0\ kg$ se suelta desde el reposo, si el coeficiente de rozamiento estático y cinético son de 0.84 y 0.20, respectivamente. Determine la aceleración del bloque.

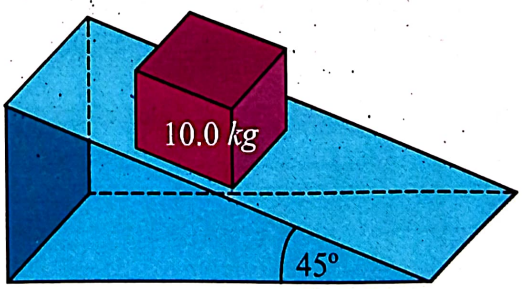


Figura 5.75

Actividad 5.50

Un niño da vueltas a una piedra de $0.50\ kg$ atada a una cuerda de 5.0 m de largo en un plano horizontal. La piedra da 60 vueltas en un minuto. Determinar la magnitud de la fuerza centrípeta que experimenta la piedra.

Figura 5.76

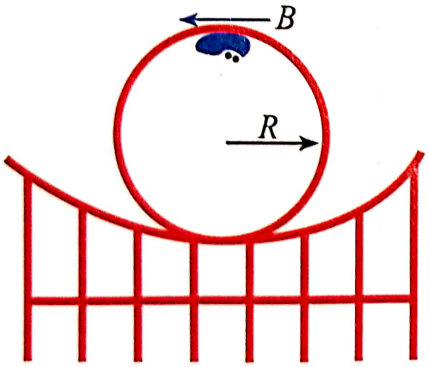


Figura 5.77

Actividad 5.51

En una montaña rusa, un carrito de $500.0\ kg$ incluido los pasajeros viaja a lo largo de la pista mostrada en la figura 5.78.

Cuando el carrito pasa por el punto más alto del círculo vertical (punto B), su rapidez es v_{min}.

Si el radio de la trayectoria circular es de $20.0\ m$, calcule la rapidez mínima v_{min} para que el carrito esté siempre en contacto con la pista.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 5.52

Una piedra de $1.0\ kg$ de masa gira en un círculo vertical de radio igual a $5\ m$ en sentido anti horario. Cuando la piedra pasa por el punto más bajo de su trayectoria circular, la cuerda se rompe. Si el punto más bajo de esa trayectoria está a $10.0\ m$ arriba de un plano horizontal, calcule el alcance horizontal máximo (R) de la piedra. La tensión que experimenta la cuerda justo antes de romperse es de $200.0\ N$.

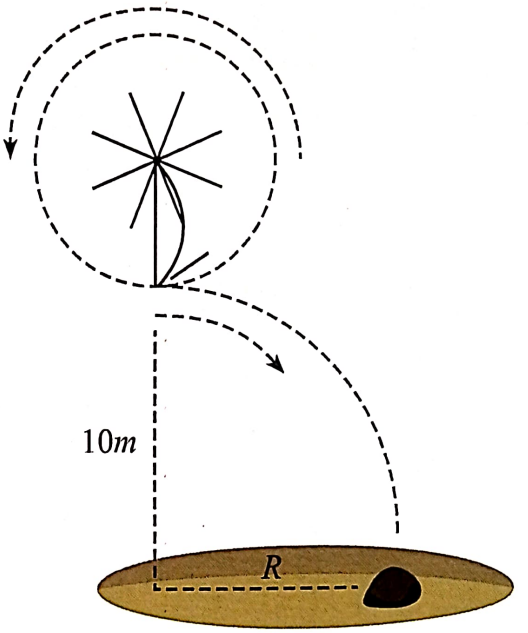


Figura 5.78

Actividad 5.53

Una piedra está girando en un círculo vertical en sentido anti- horario. Indique el valor de la aceleración tangencial de la piedra en el punto más bajo de su trayectoria suponiendo que el movimiento es con velocidad angular constante.

Actividad 5.54

Una piedra está girando en un círculo vertical en sentido antihorario.

Indique el valor de la aceleración tangencial de la piedra en el punto A como se muestra en la figura. Exprese su respuesta en función del ángulo θ. Y la aceleración de la gravedad g.

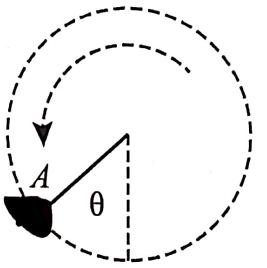


Figura 5.79

Actividad 5.55

Una piedra atada a una cuerda gira en un círculo vertical de radio R. ¿En cuál de los siguientes puntos la tensión en la cuerda tiene su valor máximo?

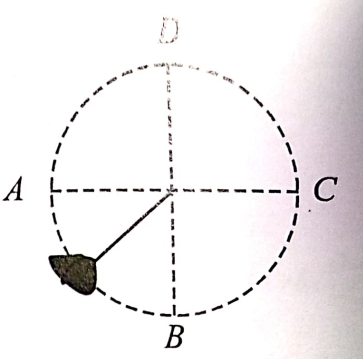


Figura 5.80

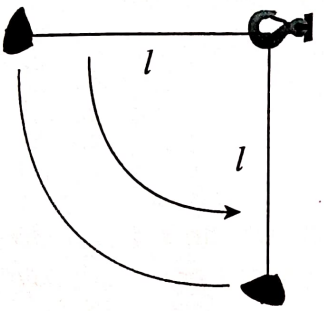


Figura 5.81

Actividad 5.56

Una piedra de masa $m = 1.0\ kg$, atada a una cuerda de longitud $l = 2.0\ m$ se suelta desde el reposo desde una posición horizontal luego gira en un círculo vertical. Si en la parte más baja de la trayectoria de la piedra la rapidez es de $\sqrt{40}\ m/s$. Determine el valor de la tensión de la cuerda en esa posición. Ver Figura 5.82.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: ..... Paralelo: .....

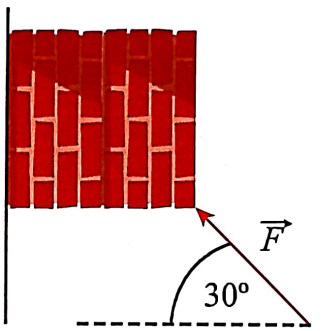
EN LOS PROBLEMAS PROPUESTOS TRABAJAR CON $g = 10\ m/s^2$

5.1 Un bloque de $1.0\ kg$ es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza horizontal de $5.0\ N$. Calcule la aceleración del bloque.

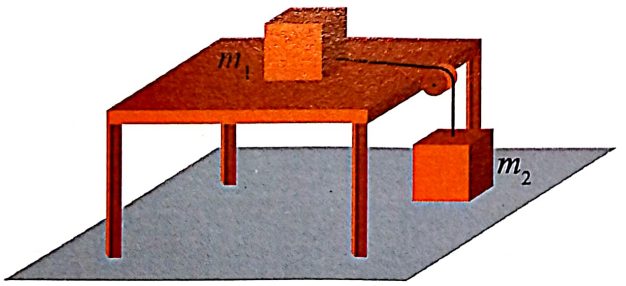
5.2 Un bloque de $2.0\ kg$ de masa es arrastrado a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por medio de una fuerza de $10.0\ N$ la cual forma un ángulo de $60°$ con la horizontal. Calcule la aceleración del bloque.

5.3 Un bloque de $2.0\ kg$ de masa se halla en reposo sobre una pared vertical sin fricción como se muestra en la figura.

Calcule la magnitud de la fuerza que se debe aplicar sobre el bloque para que se mantenga en reposo.

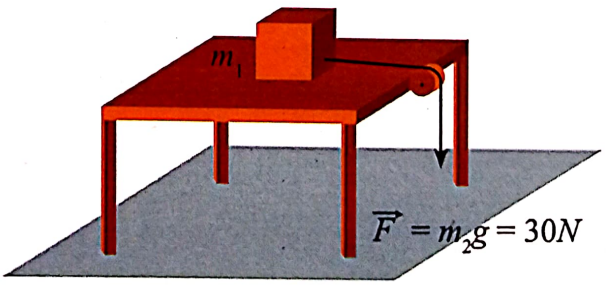


5.4 Un bloque de masa $m_1 = 2.0\ kg$ está atado por medio de una cuerda que pasa por una polea sin fricción a otro bloque de masa $m_2 = 3.0\ kg$ que cuelga del otro extremo.



Si el bloque de masa m_1 se desliza sobre una superficie horizontal y sin fricción, como se muestra en la figura, calcule la aceleración de los bloques y la tensión en la cuerda.

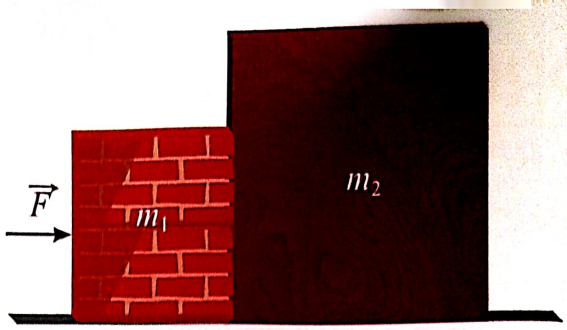
5.5 Calcule la aceleración de los bloques del problema 5.4 si se remplaza a la masa m_2 por una fuerza igual a su peso.



5.6 Una fuerza $\vec{F} = 100\ N$ se aplica sobre el bloque de masa $m_1 = 15.0\ kg$, el mismo que está en contacto con otro bloque de masa $m_2 = 10.0\ kg$ como se muestra en la figura. Suponga que los bloques se hallan sobre una superficie sin fricción.

a) Calcule la fuerza de contacto entre los dos bloques

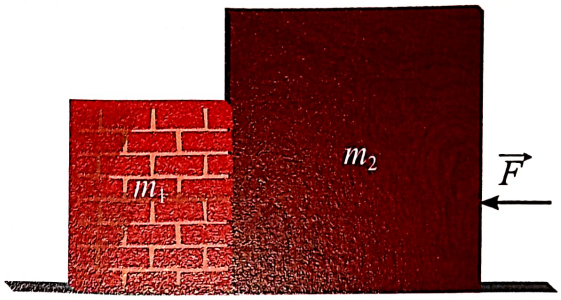
b) Calcule la aceleración de los bloques.



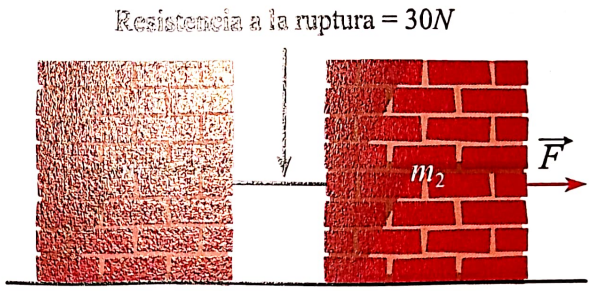
5.7 Una fuerza $\vec{F} = 100\ N$ se aplica sobre el bloque de masa $m_2 = 10\ kg$ en dirección hacia la izquierda como se muestra en la figura. Este bloque está en contacto con otro bloque de masa $m_1 = 15\ kg$. Este enunciado es igual que el problema 5.6 con la diferencia de que la fuerza es hacia la izquierda.

a) Calcule la fuerza de contacto entre los dos bloques

b) Calcule la aceleración de los bloques.

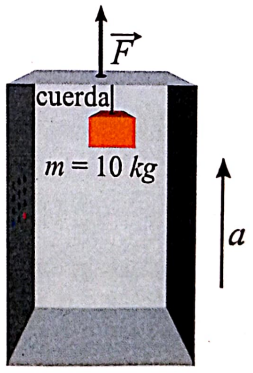


5.8 Dos bloques $m_1 = 15\ kg$ y $m_2 = 10\ kg$, mostrados en la figura, están conectados por medio de una cuerda cuya resistencia a la ruptura es de $30\ N$. ¿Cuál es la máxima fuerza F que puede aplicarse al bloque m_2 para que la cuerda no se rompa? Suponga que la superficie horizontal es sin fricción.



5.9 Del techo de un elevador se cuelga un bloque de $10.0\ kg$ por medio de una cuerda como se muestra en la figura.

Si el elevador se mueve hacia arriba con una aceleración constante de $2.00\ m/s^2$, ¿cuál es la tensión en la cuerda que sostiene el bloque?



5.10 Si la cuerda que sostiene el bloque de $10.0\ kg$ del problema 5.9 tuviera una resistencia a la ruptura de $150.0\ N$, ¿Cuál sería la máxima aceleración que debería tener el elevador para que la cuerda no se rompa?

PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: ..... Paralelo: .....

5.11 En la figura del problema 5.9 se muestra un elevador de 400 kg que lleva en su interior un bloque de 10 kg. Si la fuerza $\vec{F}$ que se ejerce sobre este ascensor es de 7100 N, ¿cuál es el máximo número de personas que pueden viajar en el elevador para que este suba con velocidad constante? Suponga que cada persona tiene una masa de 60 kg .

5.12 Una fuerza neta de 50 N se aplica sobre un objeto y este adquiere una aceleración de 2 m/s^2 . ¿Qué fuerza debe aplicarse para que su aceleración sea de 3.0 m/s^2 ?

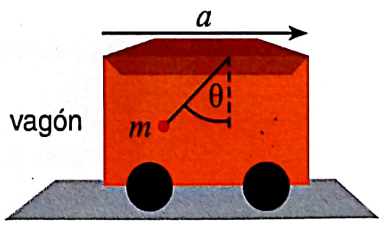
5.13 Sobre un objeto de 2.0 kg de masa que se halla sobre una mesa horizontal sin fricción se aplican dos fuerzas perpendiculares: la fuerza F_1 es de 30 N de magnitud y está dirigida a lo largo del eje $+x$ y la fuerza F_2 es de 40 N de magnitud y está dirigida hacia el eje $+y$. ¿Cuál es la magnitud y dirección de la fuerza que mantendría en reposo a este objeto? $sen53° = 0.8$

Nota: Considere que el plano xy está sobre el plano de la mesa.

5.14 Desde el segundo piso de un edificio se desea bajar una caja de 500 N de peso usando una cuerda que resiste hasta 400 N solamente. La única forma de bajar esta caja sin romper la cuerda permitiendo una aceleración. Calcule la mínima aceleración que se debe mantener a la caja para lograr este objetivo?

5.15 Del techo de un vagón que se mueve hacia la derecha se cuelga una masa m mediante una cuerda como se observa en la figura.

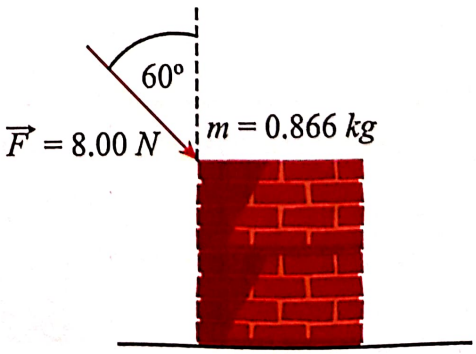
Si la cuerda forma un ángulo θ con la vertical, ¿cuál es la aceleración del vagón? Exprese su respuesta en términos de g y θ.



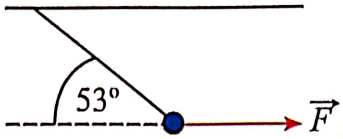
5.16 Una fuerza F se aplica sobre un objeto como se muestra en la figura.

Si la masa del objeto es de 0.866 kg y la fuerza es de 8.00 N, calcule la magnitud de la normal y la aceleración del objeto si se desliza sobre una superficie horizontal sin fricción.

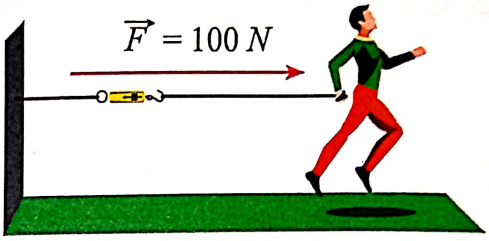
$cos60° = 0.5$; $sen60° = 0.866$



5.17 Calcule la fuerza horizontal F, dirigida hacia la derecha, que debe aplicarse a la esfera de 10 kg; como se muestra en la figura, para que se mantenga en reposo. $sen53° = 4/5$; $cos53° = 3/5$

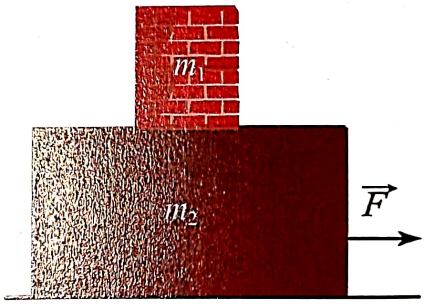


5.18 Un hombre hala una cuerda con una fuerza de 100 N. El otro extremo de la cuerda está atado a una balanza de resorte y esta última a un poste vertical, ¿cuál es la lectura de la balanza?



5.19 Un bloque de masa $m_1 = 1.0kg$ descansa sobre otro de masa $m_2 = 10.0kg$. Entre m_1 y m_2 hay fricción de modo que los dos bloques viajan juntos. Entre m_2 y la superficie horizontal no hay fricción.

Calcule la magnitud de la fuerza F para que los dos bloques se muevan con una aceleración de 2.0 m/s^2 hacia la derecha.



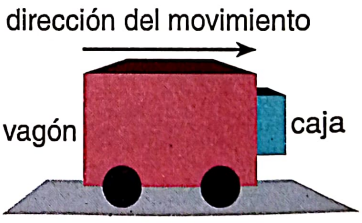
5.20 Una caja puede viajar sobre la pared vertical de un vagón sin caerse como se muestra en la figura. Esto se debe a:

a) La velocidad del vagón es extremadamente grande pero constante.

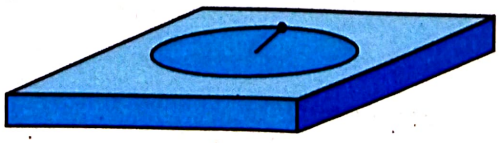
b) El vagón experimenta una pequeña aceleración que va disminuyendo con el tiempo.

c) Debe haber fricción entre las dos paredes (superficies) que están en contacto

d) La caja siempre resbala.



5.21 El disco de la figura da una vuelta cada 3.14 s. Si el radio de la trayectoria circular es de 1.0 m, calcule la aceleración centrípeta de la partícula.



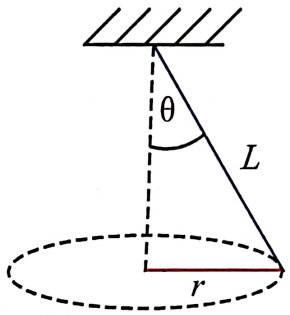
PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: ..... Paralelo: .....

5.22 Un niño hace girar una piedra de 2.0 kg atada a una cuerda de 2.0 m de longitud en un plano horizontal. Si la rapidez de la piedra es de 2.0 m/s, ¿cuál es la tensión en la cuerda?

5.23 Un péndulo cónico consiste de un objeto atado a una cuerda de longitud L que forma un ángulo θ con la vertical como se muestra en la figura.

El movimiento del objeto es en un plano horizontal con movimiento circular uniforme. Obtenga una expresión para la rapidez del objeto en función de la aceleración de la gravedad g, la longitud de la cuerda L, y el ángulo θ.



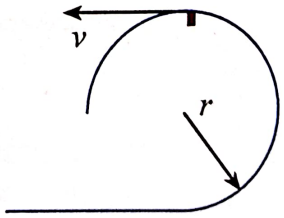
5.24 Considere un péndulo simple de longitud $L = 1.6\ m$ que tiene atado al extremo de la cuerda un objeto de masa $m = 1.0\ kg$. ¿Cuál es la tensión en la cuerda cuando pasa por la posición más baja de su movimiento. La velocidad en ese instante es de 4 m/s. La aceleración de la gravedad es de 10.0 m/s^2.

5.25 Un automóvil que viaja a 30.0 m/s entra en una curva cuyo radio de curvatura es de 200 metros. Si la carretera no tiene peralte, cuál es el mínimo coeficiente de rozamiento estático entre las llantas y el pavimento para que el automóvil logre girar sin derrapar?

5.26 Suponga que en el problema 5.25 no hay fricción entre las llantas del automóvil y el pavimento, ¿cuál debería ser la tangente del ángulo de peralte para que el automóvil logre girar sin derrapar?

5.27 Un pequeño bloque se mueve horizontalmente y logra ascender por la pista circular de radio igual a 10 m de tal forma que la fuerza que la pista ejerce sobre el bloque en la parte más alta es de 3 veces su peso.

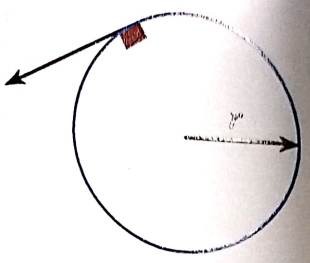
Calcule la velocidad v del bloque en la parte más alta de la pista.



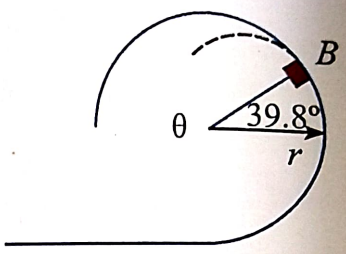
5.28 ¿Cuál es la máxima rapidez que puede tener un automóvil para que logre dar una curva de 250 *metros* de radio de curvatura si la carretera tiene un ángulo de peralte de 10° y la fricción entre las llantas y la carretera es despreciable?.

5.29 Cuando un bloque pequeño pasa por la parte más alta de una pista circular su rapidez mínima es de 20 m/s para apenas mantenerse en contacto con la pista.

¿Cuál debe ser el radio de curvatura para lograr este objetivo?

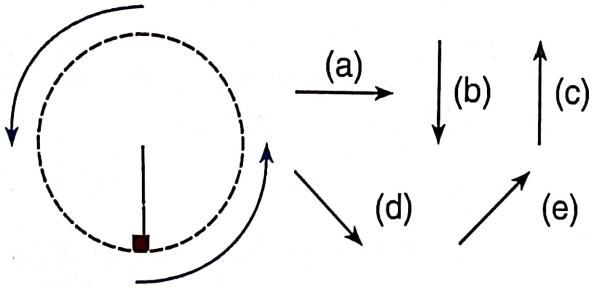


5.30 Un bloque entra en una pista circular de radio $r = 10m$ y cuando alcanza el punto B de la figura se desprende de la pista y continúa moviéndose libremente. El radio $0B$ forma un ángulo de $39.8°$ con la horizontal. Calcule la rapidez del bloque en el punto B.



5.31 La masa de la Tierra es M, su radio es R y el período es T (Período es el tiempo en el que la Tierra realiza una vuelta alrededor de su propio eje). Obtenga una expresión para la magnitud de la aceleración centrípeta que experimenta una persona que esté en el Ecuador. Exprese su respuesta en función R y T.

5.32 Un bloque atado a una cuerda da vueltas siguiendo una trayectoria circular vertical como se muestra en la figura. Si la cuerda se rompe cuando el objeto se encuentra en la parte más baja de su trayectoria, indique, ¿cuál de las figuras representa el movimiento del bloque inmediatamente después de que se rompe la cuerda?.



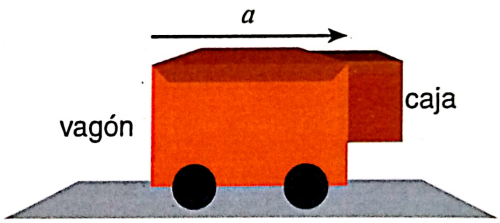
5.33 Un avión da vueltas siguiendo una trayectoria vertical de radio igual a $9.00\ km$. ¿ Cuál debe ser la rapidez del avión en la parte más alta de su trayectoria circular para que el piloto no experimente peso alguno?

5.34 Un niño ata una piedra de $1.0\ kg$ a una cuerda y hace dar vueltas de modo que la piedra se mueve en un círculo horizontal de radio igual a $2.0\ m$. Si la cuerda se rompe cuando la tensión es de $50\ N$, ¿cuál es la rapidez máxima de la piedra en este instante? Calcule también la tensión en la cuerda si la velocidad fuera de $5\ m/s$, con una masa de $2.0\ kg$ y el radio se mantuviera constante. ¿Se rompería la cuerda?

5.35 Una piedra atada a una cuerda gira en un círculo vertical de radio R. La rapidez de la piedra en la parte de arriba es v_{arr} y en la parte de abajo es v_{aba}. Calcule las tensiones T_{arriba} y T_{abajo}. (Nota: El movimiento vertical como en este ejemplo es un movimiento con rapidez variable). Exprese su respuesta en función de v_{arr}, v_{aba}, m, g y R.

5.36 Un planeta orbita alrededor del Sol y se encuentra a una distancia de 1.5×10^{11} m. Suponiendo que el planeta da una vuelta alrededor del Sol en 3.14×10^{7} segundos, calcule la aceleración centrípeta del planeta.

5.37 Una caja viaja en la pared vertical de un vagón que se mueve hacia la derecha como se muestra en la figura. Calcule la mínima aceleración que debe tener el vagón para que la caja no deslice. Suponga que el coeficiente de rozamiento estático entre la caja y la pared vertical del vagón es de 0.50.



5.38 Dos bloques de masas m_1 y m_2 están conectados mediante una cuerda sin masa que pasa alrededor de una polea de masa despreciable y sin fricción como se muestra en la figura. Suponiendo que $m_1 > m_2$ y que los bloques parten del reposo, indique cuál de las siguientes alternativas es correcta.

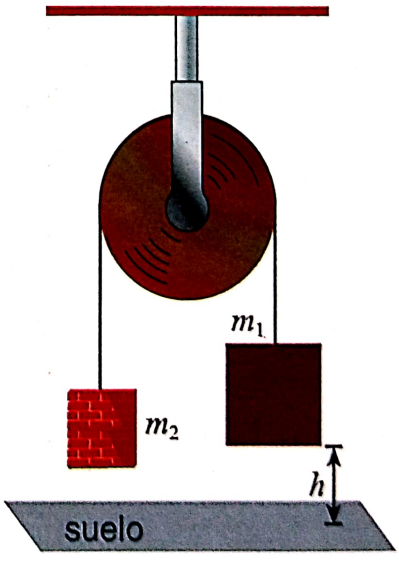
a) La rapidez del bloque de masa m_2 es igual cero cuando m_1 llega al suelo.

b) La distancia máxima que asciende el bloque de masa m_2 es h.

c) Cuando el bloque m_2 asciende a su altura máxima se ha movido una distancia mayor que h.

d) La aceleración de m_2 es la mitad de la aceleración de m_1.

e) El sistema de las dos masas no acelera sino que se mueve con rapidez constante.

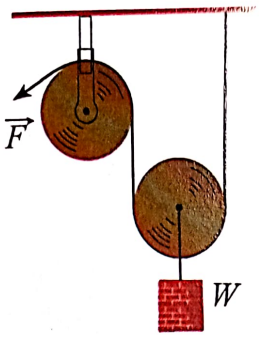


5.39 Un bloque de masa m se halla en reposo sobre un plano inclinado que forma un ángulo θ con respecto a la horizontal. La magnitud de la fuerza total que el plano inclinado ejerce sobre el bloque de masa m coincide con:

a) mg b) $mg\cos\theta$ c) $mg\,sen\theta$

d) $\mu s\, mg\cos\theta$ e) $\mu k\, mg\,sen\theta$

5.40 Para el siguiente sistema de poleas mostrado en la figura. Calcule la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ que se debe ejercer para mantener el bloque de peso W en reposo. Suponga que las poleas tienen masa despreciable y sin fricción en sus ejes.



a) W b) $2W$

c) $W/3$ d) $W/2$

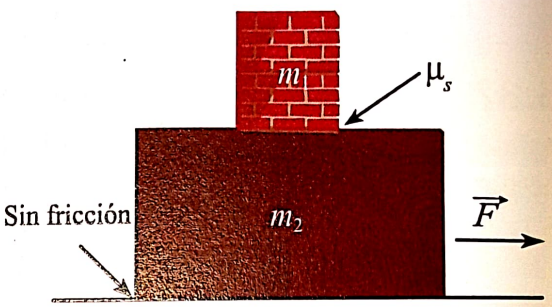
e) $2W/3$

5.41 Un bloque de masa m_1 se halla sobre un bloque de masa m_2 como se muestra en la figura. El coeficiente de rozamiento estático entre m_1 y m_2 es μ_s. Suponga que entre m_2 y el piso no hay fricción. ¿Cuál es la máxima fuerza $\vec{F}$ horizontal que se debe ejercer sobre m_2 para que el bloque m_1 no deslice?

a) $\mu_s m_1 g$ b) $\mu_s (m_1+m_2)g$

c) $\mu_s m_2 g$ d) $\mu_s (m_1- m_2)g$

e) m_1 desliza porque no depende de la fuerza $\vec{F}$.

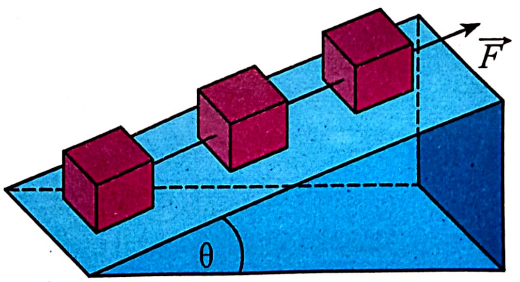


5.42 Una fuerza de magnitud F, paralela al plano inclinado, hala tres bloques conectados con una cuerda inextensible y de masa despreciable sobre un plano inclinado sin fricción el cual forma un ángulo θ con la horizontal. Suponga que los tres bloques tienen igual masa m y que se mueven en la dirección de la fuerza $\vec{F}$. Calcule la aceleración de los bloques.

a) $F/3m$ b) $F/(3mgsen\theta)$

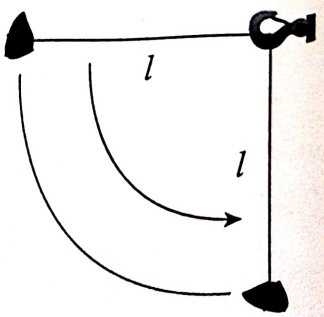
c) $F/3m - gsen\theta$ d) $Fsen\theta/3m$

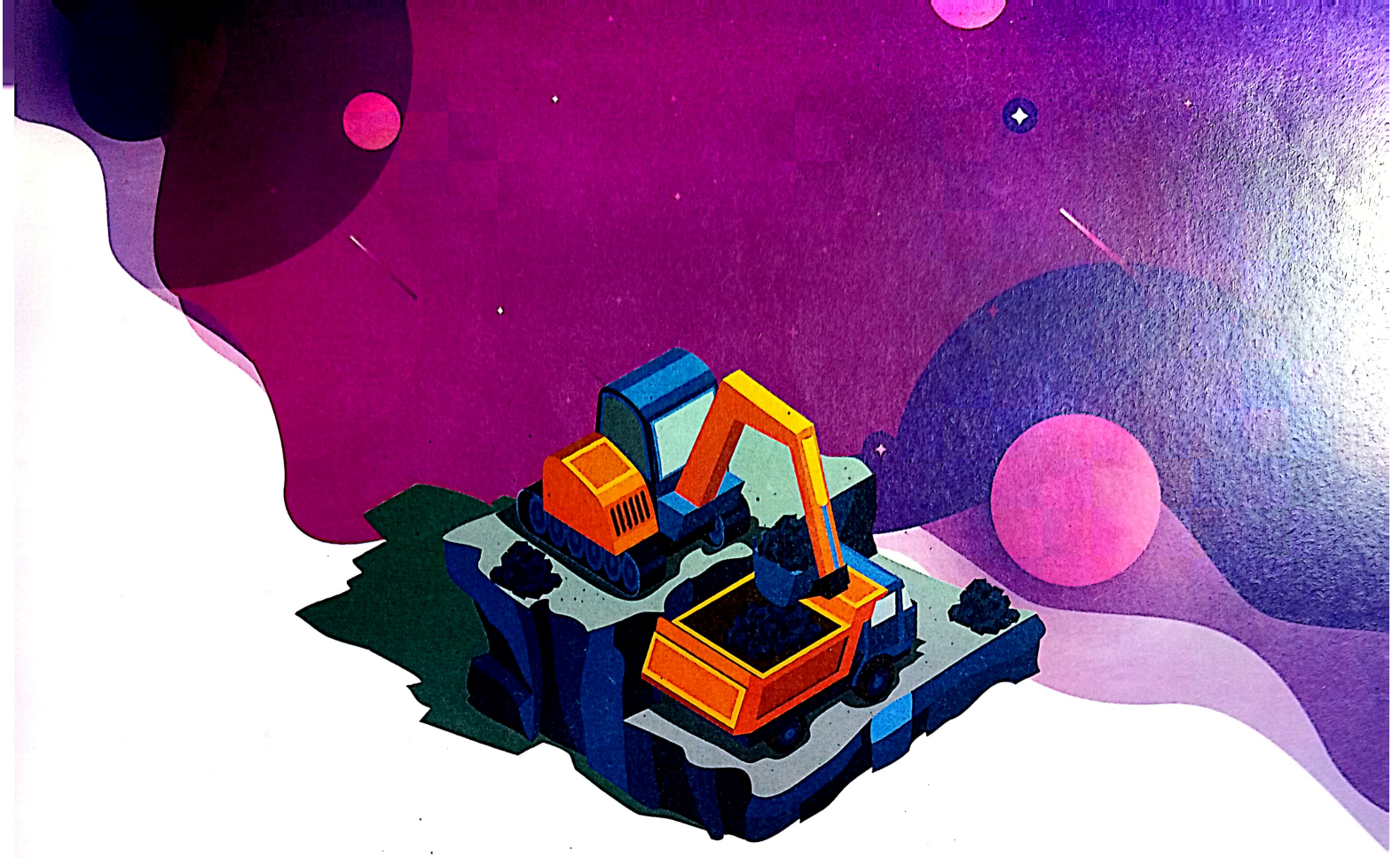
e) $F - 3mgsen\theta$



5.43 Una piedra de masa $m = 2.00\ kg$, atada a una cuerda de longitud $l = 1.0$ m se suelta desde el reposo desde una posición horizontal luego gira en un círculo vertical .

Si en la parte más baja de la trayectoria de la piedra la rapidez es de $\sqrt{20}\ m/s$. Determine el valor de la tensión de la cuerda en esa posición. Ver Figura.





6 | TRABAJO Y ENERGÍA

El desarrollo de los países está asociado con el desarrollo tecnológico, industrial, social, cultural, etc.

El desarrollo industrial se debe a la modernización de equipos y maquinarias cada vez más eficientes donde se relacionan el trabajo, la energía, la potencia y la eficiencia juntamente con la automatización de los procesos para mejorar su rendimiento tanto, en la parte energética, económica, social y ambiental.

El trabajo que se menciona en el párrafo anterior, no es a una actividad por la cual recibe una remuneración o un salario.

El trabajo al que se hace referencia es aquel que se desarrolla por ejemplo cuando un motor eléctrico aplica una fuerza a un ascensor por medio de un cable y lo desplaza a los diferentes pisos. Es decir, nos referimos a una fuerza aplicada que produce un desplazamiento y si este trabajo lo asociamos con el tiempo empleado, tenemos lo que en ingeniería se llama potencia.

La potencia es lo que diferencia a las máquinas, es decir la capacidad de desarrollar trabajo por unidad de tiempo.

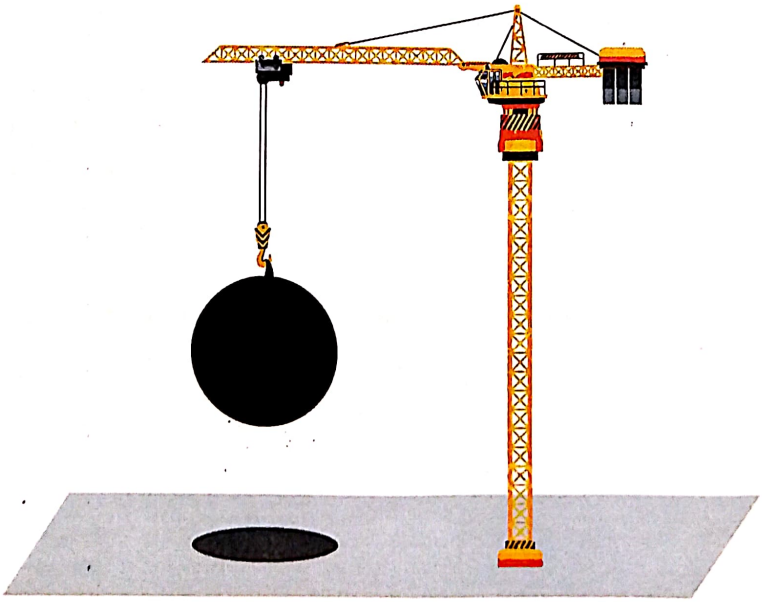
El trabajo también tiene la capacidad de cambiar la energía cinética de los cuerpos, lo cual se explica con el teorema del trabajo y la energía.

La energia, el concepto de energia es bastante amplio pero podría definirse como la capacidad que tienen los cuerpos para realizar un trabajo y en consecuencia producen cambios o transformaciones en el mismo cuerpo o en otros cuerpos que pueden ser cambios en su movimiento o temperatura, etc.

En este curso estudiaremos algunos tipos de energía como la energía cinética, energía potencial elástica, energía potencial gravitacional y energía mecánica. En otros cursos se estudiará otros tipos de energía como la energía potencial eléctrica, energía interna, energía térmica, energía química, energía nuclear, etc.

Otro ejemplo asociado con trabajo, energía y potencia lo podemos ver cuando una retroexcavadora toma una masa de material y lo lleva a una altura determinada en un determinado tiempo, se puede decir que la retroexcavadora realizó un trabajo. Porque aplicó una fuerza para levantar un cuerpo y hubo un desplazamiento que será la altura, y desarrolló una potencia que será el trabajo por unidad de tiempo.

En este capítulo relacionaremos el trabajo, la energía cinética, la energía potencial gravitacional y elástica para aplicar la conservación de la energía.



Todo esto lo podremos observar cuando una grúa levanta un cuerpo y lo transporta de un lugar a otro.

6.1 TRABAJO Y ENERGÍA

El término trabajo en nuestra sociedad está asociado con la actividad física e intelectual por la cual un individuo recibe una remuneración o algo equivalente a la misma; pero en Física, el término TRABAJO tiene otro significado y puede definir como el resultado de la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo produciendo un desplazamiento en el mismo. La energía se define como la capacidad que tiene un cuerpo para realizar un trabajo. El simbolo de trabajo será W.

$$W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\theta \qquad (6.1)$$

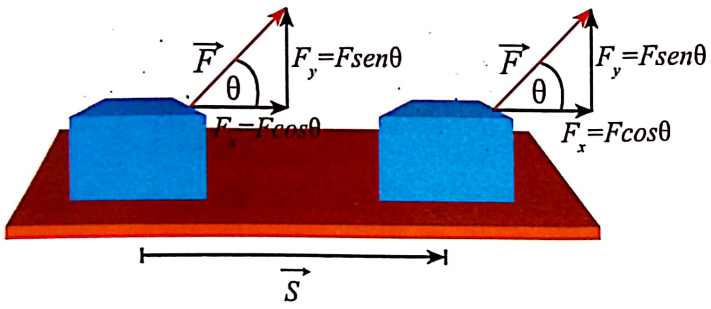


Figura 6.1

El trabajo es una cantidad escalar, su unidad en el SI es el Joule (J) y es resultado del producto punto entre la fuerza y el desplazamiento, como se muestra en la ecuación 6.1

De acuerdo a la ecuación 6.1, el término $F_x=F\cos\theta$ es la componente de la fuerza $\vec{F}$ en el eje x; por lo tanto, el trabajo W realizado por la fuerza $\vec{F}$ es el resultado del producto de la componente de la fuerza paralela al desplazamiento multiplicada por la magnitud del desplazamiento.

El signo del trabajo está dado por el signo del coseno del ángulo; entonces:

Si $\theta < 90°$, el $\cos\theta$ es positivo y el trabajo es positivo.

Si $\theta = 90°$, el $\cos\theta$ es cero y el trabajo es cero.

Si $\theta > 90°$, el $\cos\theta$ es negativo y el trabajo es negativo.

Si el trabajo de la fuerza neta $\vec{F}$ es positivo significa que el cuerpo incrementa su energía.

Si el trabajo es cero significa que sobre el cuerpo NO se está realizando trabajo alguno.

Si el trabajo de la fuerza neta $\vec{F}$ es negativo significa que el cuerpo disminuye su energía.

Ejemplo 6.1 - Se empuja un bloque de masa 20.0 kg con una fuerza de $200N$ formando un ángulo $\theta = 30°$ con la horizontal como se indica en la figura 6.2.

El bloque se mueve sobre una superficie horizontal cuyo coeficiente de rozamiento cinético es $\mu_k = 0.40$ como se indica en la figura 6.2.

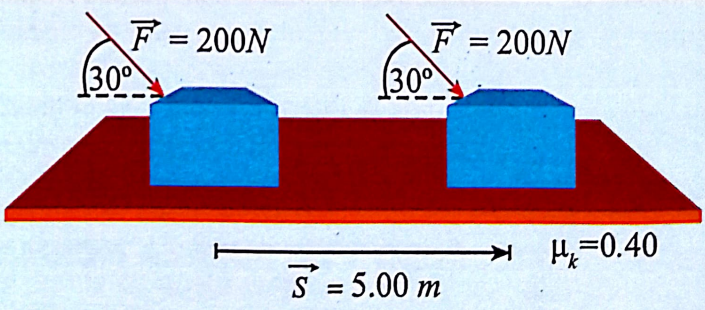


Figura 6.2

Si el bloque se desplaza $5m$:

a) Determinar las componentes rectangulares de la fuerza $\vec{F}$.

b) Determinar la fuerza normal.

c) Determinar la fuerza de fricción.

d) Calcular el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.

e) Calcular el trabajo neto.

Solución

a) Determinar las componentes rectangulares de la fuerza $\vec{F}$

Usaremos el *DCL* del cuerpo para descomponer la fuerza $\vec{F}$ en sus componentes rectangulares.

Las componentes en los ejes x y y son:

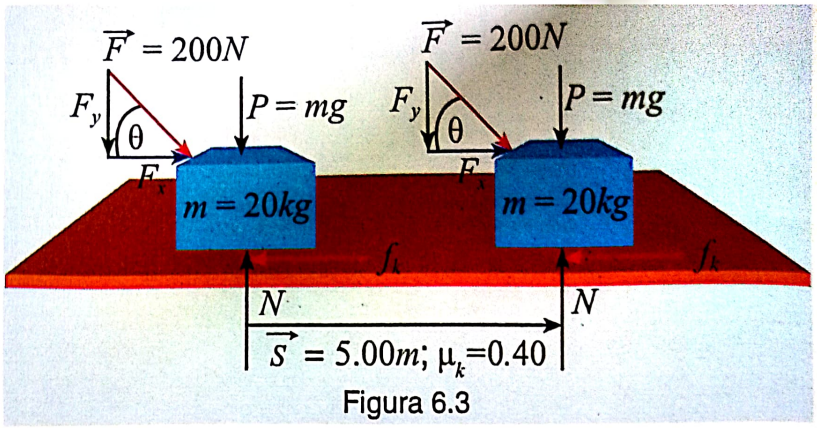


Figura 6.3

$$F_x = F\cos\theta = 200N\cos 30° = 173\ N \qquad F_y = F\operatorname{sen}\theta = 200N\operatorname{sen}30° = 100\ N$$

b) Determinar la fuerza normal.

Para determinar la fuerza normal se debe realizar la sumatoria de fuerzas en y, igualar a cero y despejar la fuerza normal.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg - F_y = 0$$

$$N = mg + F_y \rightarrow N = 20\ kg \times 9.8\frac{m}{s^2} + 100N = 296\ N$$

c) Determinar la fuerza de fricción. Para determinar la fuerza de fricción se debe utilizar $f_k = \mu_k N$

$f_k = \mu_k N = 0.40 \times 296\ N = 118\ N \rightarrow f_k = 118\ N$ opuesta al movimiento.

d) Calcular el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.

El trabajo de cada una de las fuerzas se calcula con la ecuación 6.1

TRABAJO DE LA FUERZA F

Retomando el ejemplo 6.1, el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ será igual a $W_F = FS\cos\theta = 200\ N \times 5.00\ m \times \cos 30° = 866\ J$

El trabajo de la fuerza $\vec{F}$ también puede ser calculado como el trabajo realizado por sus fuerzas componentes en x y en y

El trabajo de F_x es: $W_{Fx} = F_x \cdot S = 173.2N \times 5.00\ m = 866\ Nm = 866\ J$

El trabajo de F_y es exactamente igual a cero porque F_y es perpendicular al desplazamiento y por lo tanto NO realiza trabajo.

En este caso el trabajo de la fuerza $\vec{F}$ será solo el realizado por la componente de la fuerza en x, porque esta es paralela al desplazamiento y sí realiza trabajo; mientras que la componente de la fuerza en y, como es perpendicular al desplazamiento, no realiza trabajo.

TRABAJO DEL PESO Y LA FUERZA NORMAL

Trabajo del peso y la fuerza normal:

El trabajo del peso $W_p = mgS\cos 90° = 0\ J$

El trabajo de la normal $W_N = NS\cos 90° = 0\ J$

El trabajo es igual a cero porque, en este caso, tanto el peso como la normal son fuerzas perpendiculares al desplazamiento, por lo tanto ***NO realizan trabajo*** alguno.

EL TRABAJO DE LA FUERZA DE FRICCIÓN

El trabajo de la fuerza de fricción: La fuerza de fricción y el desplazamiento forman un ángulo de 180° por lo tanto el trabajo estará dado por la siguiente expresión:

$$W_{fk} = f_k S cos180° = - f_k S = - 118.4\, N \times 5m = - 592\, J$$

A continuación se explica el trabajo neto con su respectivo ejemplo de aplicación que corresponde al literal e.

6.2 TRABAJO NETO O TRABAJO TOTAL

El trabajo neto es el trabajo total realizado por las fuerzas que están actuando sobre el cuerpo y se puede calcular de las siguientes formas:

1) ***El trabajo neto o total es la sumatoria algebraica de todos los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.***

$$\sum W_i = W_F + W_P + W_N + W_{fk} \qquad (6.2)$$

e) Analizando nuevamente el ejemplo 6.1 en el literal (e) se pide calcular el trabajo neto.

$$\sum W_i = 866\, J + 0 + 0 - 592\, J = +274\, J$$

2) ***El trabajo neto también se puede calcular por el trabajo realizado por la fuerza neta o resultante.***

La fuerza resultante en y es igual a cero $\sum F_y = 0$

La fuerza resultante en x es $F_{neta} = \sum F_x = F_x - f_k = 173.2\, N - 118.4\, N = +54.8\, N.$

La fuerza resultante por lo tanto es $+54.8\, N$. El trabajo realizado por la fuerza resultante se puede calcular con esta fuerza de la siguiente manera $W_{neto} = F_{neta} S cos0° = +54.8\, N \times 5m = +274\, J$, lo cual coincide con el valor obtenido en el literal (e) del ejemplo 6.1.

Ejemplo 6.2 - Un trabajador de una finca bananera como se muestra en la figura 6.4, está cargando un racimo de bananos de $10\, kg$ y se desplaza horizontalmente $10\, m$, con velocidad constante hasta el camión de carga. Con relación a la información proporcionada, ***se pide escoger la alternativa correcta.***

a) El trabajo que la persona realiza sobre el racimo es $980J$.

b) El trabajo realizado por la persona sobre el racimo es mayor que 0 y menor a $980\, J$.

c) El trabajo realizado por la persona sobre el racimo es mayor a $980\, J$.

d) El trabajo realizado por la persona sobre el racimo es igual a cero.

Figura 6.4

Solución:

Como la persona realiza una fuerza vertical sobre el racimo y se desplaza horizontalmente, entonces, la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares; por lo tanto, el trabajo realizado por la persona sobre el racimo es cero.

Ejemplo 6.3 - Se lanza un cuerpo de $1.0\ kg$ de masa hacia arriba desde la terraza de un edificio de $30\ m$ de altura como se indica en la figura 6.5.

Si el cuerpo se desplaza verticalmente $5.0\ m$ hasta alcanzar su altura máxima, entonces, el trabajo realizado por el peso es:

Figura 6.5

Solución

El trabajo realizado por el peso es $W = mg\Delta y cos\theta$. Debido a qué los vectores desplazamiento y peso son opuestos, entonces $\theta = 180°$

$$W = mg\Delta y cos180° = 1.0kg \times 9.8\frac{m}{s^2} \times 5.00m(-1)$$

$W = -49J$ (el signo negativo representa disminución de la energía cinética)

Ejemplo 6.4 - Con relación al ejemplo 6.3 (ver figura 6.5), se pide:

a) Calcular el trabajo que realiza el peso cuando el cuerpo desciende desde su altura máxima hasta el punto donde fue lanzado.

b) Calcular el trabajo neto, es decir, el trabajo del peso en su trayectoria de subida y bajada del cuerpo.

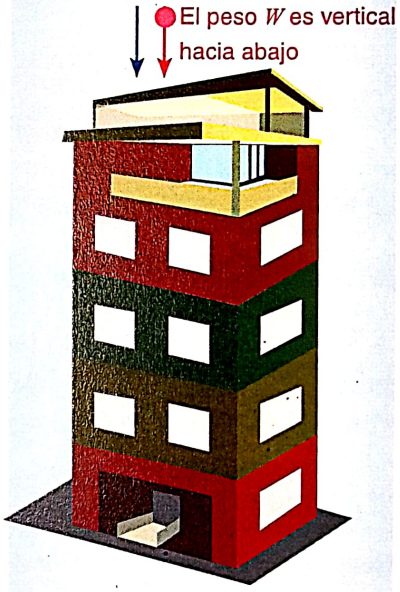


Figura 6.6

Solución

a) El trabajo cuando el cuerpo desciende es $W = mg\Delta y cos\theta$. El desplazamiento y el peso están en la misma dirección $\theta = 0°$; por lo tanto:

$$W = mg\Delta y cos\theta = 1.0\ kg \times 9.8\ \frac{m}{s^2} \times 5.0m(1) = +49\ J$$ (el signo positivo representa aumento de la energía cinética)

b) El trabajo neto es la sumatoria de los trabajos en la subida y en la bajada.

$$W_{neto} = W_{subida} + W_{bajada} = -49\ J + 49\ J = 0$$

Se puede concluir que el trabajo del peso, que es una fuerza gravitacional, en una trayectoria cerrada es exactamente igual a cero (esta es una condición de una fuerza conservativa).

6.3 POTENCIA

En los ejercicios anteriores se calculó el trabajo realizado por una fuerza $\vec{F}$, pero para fines prácticos no solo es necesario conocer el trabajo o la energía involucrada en un proceso, sino también es importante conocer en qué tiempo se realiza este trabajo.

Por lo tanto, aparece un término que se conoce con el nombre de *POTENCIA* y es la relación entre el trabajo y el tiempo empleado

$$P = \frac{W}{\Delta t} \qquad (6.3)$$ Potencia Media

Debido a que el trabajo se define como $\vec{F}\cdot\vec{\Delta X}$, reemplazando en la ecuación 6.3 queda:

$$P=\frac{\vec{F}\cdot\vec{\Delta X}}{\Delta t}$$ y reconociendo que $\frac{\vec{\Delta X}}{\Delta t}$ es la velocidad:

$$P=Fv \qquad (6.4)$$ Potencia Instantanea

Las unidades de la potencia son: $\frac{J}{s}=Watt=Vatio$

1 HP (horsep power) es la unidad de potencia en el sistema Inglés y es equivalente a 746 Watt.

$$1\ HP=746\ Watt$$

La empresa eléctrica en el Ecuador entrega mensualmente la factura a cada uno de los clientes y factura los kilovatios- hora ($kW\cdot h$) consumidos en el mes. Estos $kW\cdot h$ corresponden al consumo mensual de energía eléctrica en los distintos hogares, oficinas o empresas; por lo tanto, el valor que los clientes pagan corresponde al consumo de energía.

$$1kW\cdot h=1kW\cdot h\times\frac{1000W}{1kW}\times\frac{3600s}{1h}=3.6\times10^6\,J$$

Un *kilovatio- hora* equivale a 3600000 J.

6.4 TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

El trabajo de una fuerza constante es el producto de la fuerza paralela al desplazamiento multiplicada por el desplazamiento. En un gráfico fuerza versus desplazamiento, el trabajo representa el área bajo la curva y el signo indica si se hizo trabajo sobre el cuerpo o si el cuerpo realizó trabajo. En la figura 6.7, el área sombreada indica que el trabajo es positivo y por tanto, sobre el cuerpo se realizó + 50 J de trabajo.

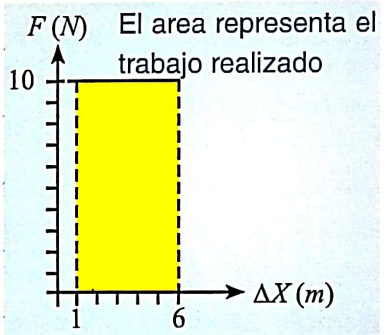


Figura 6.7

Ejemplo 6.5 - Sobre un cuerpo de masa m se aplica una fuerza que varía con x como se indica en la figura 6.8. Calcular el trabajo neto realizado por la fuerza $\vec{F}$ en [J]

El trabajo representa el área bajo la curva y en este caso corresponde a $+84J$

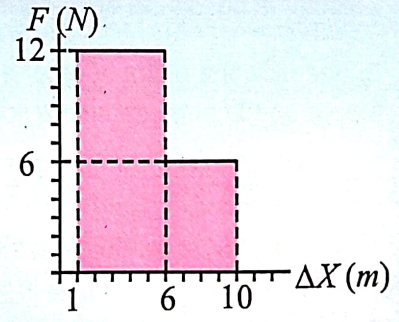


Figura 6.8

6.5 TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

El trabajo de una fuerza variable también está representado por el área bajo la curva y por lo tanto en la figura 6.9, el área bajo la curva representa el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$.

El área representa el trabajo realizado

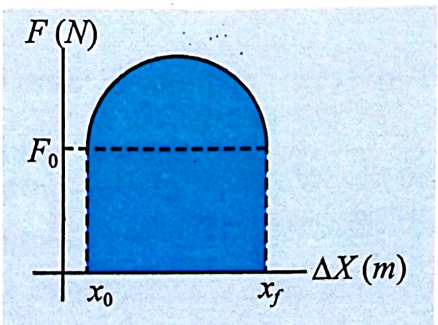


Figura 6.9

6.6 LEY DE HOOKE ($F=-\ ky$)

Suponga que se tiene un resorte o muelle y se lo estira, el mismo presenta una resistencia a ese estiramiento debido a sus fuerzas internas que están relacionadas con su estructura atómica molecular y se llaman fuerzas elásticas.

La fuerza elástica es proporcional a la elongación del resorte, pero tiene un valor límite que se conoce como el límite elástico y significa el máximo valor con el que existe esta proporcionalidad. Si el resorte o muelle se lo estira o comprime, (Figura 6.10) este ejerce una fuerza contraria a dicha elongación; y por lo tanto, la fuerza que experimenta el resorte puede ser descrita de la siguiente manera:

$F=-\ ky$, donde k es la constante elástica del resorte y sus unidades en el SI son: $\frac{N}{m}$, "y" representa la elongación del resorte, es decir, la cantidad que se estira o se comprime medida desde su longitud natural. Entiéndase por longitud natural, la longitud que tiene el resorte sin deformación.

Si una masa m se suspende de un resorte, este se alarga una distancia (a), como se indica en la figura 6.10 y experimenta una fuerza contraria al peso que es la fuerza que lo está deformando.

Para evaluar la constante elástica del resorte se analiza cuando el sistema masa - resorte está en equilibrio. En la condición de equilibrio, la sumatoria de fuerzas en y es igual a cero, por lo tanto, se tiene: $\sum F_y = 0$

$$\rightarrow ka - \ mg = 0 \rightarrow k = \frac{mg}{a}\left[\frac{N}{m}\right]$$

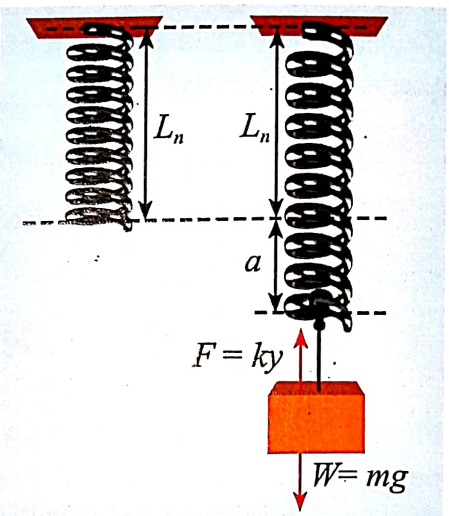


Figura 6.10

Ejemplo 6.6 - Un resorte tiene una longitud de un $1.0\ m$ sin deformarse, si se le suspende un cuerpo de masa $40.0\ kg$, la longitud final del resorte es $1.20\ m$, ver figura 6.11. Se pide:

a) Calcular la constante del resorte.

b) Si una persona estira el resorte (sin masa colgante) hasta una longitud final de $1.35\ m$ ¿Cuál será la fuerza que la persona ejerce sobre el resorte?

Solución

Parte a) Para calcular la constante del resorte se analiza el resorte en equilibrio con el peso suspendido y se aplica la sumatoria de fuerzas igual cero.

$$k = \frac{mg}{a}\left[\frac{N}{m}\right] \rightarrow k = \frac{40.0\ kg \times 9.8\ m/s^2}{1.2\ m - \ 1.0\ m} = 1960\left[\frac{N}{m}\right]$$

Parte b) La magnitud de la fuerza que experimenta el resorte es

$$F = ky = 1960\ \frac{N}{m}\ (1.35\ m - \ 1.0\ m) = 686\ N$$

dirigida hacia abajo.

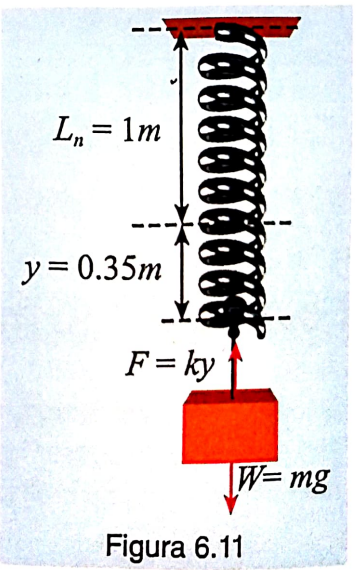


Figura 6.11

6.7 FUERZA VARIABLE EXPERIMENTADA POR UN RESORTE

En las figuras 6.12 y 6.13, se puede observar la fuerza que experimenta el resorte cuando es estirado o comprimido. En la figura 6.12 se puede observar que cuando se estira un resorte, el mismo experimenta un desplazamiento positivo ($+x$), pero ejerce una fuerza negativa ($-F$) opuesta a este desplazamiento. De acuerdo a la figura 6.13 se puede observar que cuando se comprime un resorte, el mismo experimenta un desplazamiento negativo ($-x$), pero el resorte ejerce una fuerza positiva ($+F$) opuesta a este desplazamiento. Los dos casos pueden observarse en las siguientes figuras.

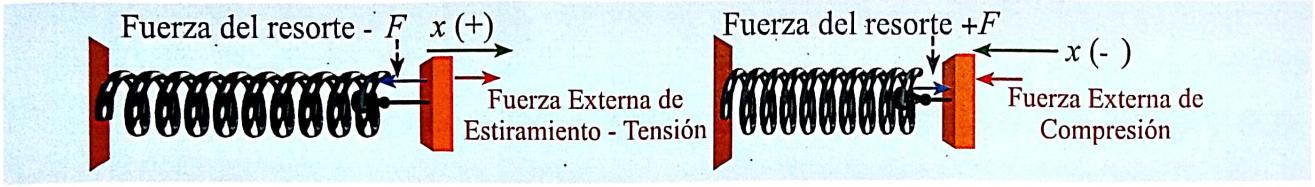


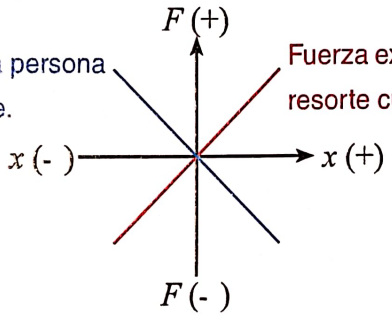
Figura 6.12

Figura 6.13

6.8 GRÁFICO FUERZA VERSUS DESPLAZAMIENTO PARA UNA FUERZA VARIABLE QUE EXPERIMENTA UN RESORTE

De acuerdo a las figuras 6.12 y 6.13, se puede realizar un gráfico fuerza versus desplazamiento como se indica a continuación en la figura 6.14.

Fuerza que ejerce el resorte sobre la persona cuando este se estira o se comprime.



Fuerza externa que ejerce la persona sobre el resorte cuando este se estira o se comprime.

Figura 6.14

6.8.1 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA EXTERNA SOBRE UN SOPORTE

El área bajo la curva F versus x, mostrada en la figura 6.15, representa el trabajo realizado por una fuerza externa sobre un resorte cuando este se estira.

El trabajo realizado por la fuerza externa sobre el resorte está dado por la siguiente expresión:

$W_{P/R} = \frac{1}{2} kx^2_f - \frac{1}{2} kx^2_i$ y representa el área bajo la curva F versus x.

$$W_{P/R} = \frac{1}{2} kx^2_f - \frac{1}{2} kx^2_i \qquad (6.5)$$

El termino $\frac{1}{2} kx^2$ representa la energía potencial elástica.

$$U = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (6.6)$$

$W_{P/R} = U_f - U_i$ (representa el trabajo de la persona sobre el resorte en terminos de la energia potencial elástica)

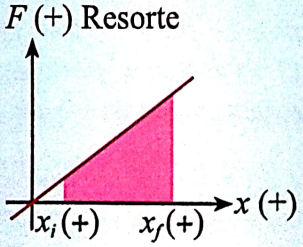


Figura 6.15

Note que esta expresión es igual al área rayada de la figura 6.15.

El trabajo realizado por el resorte sobre la persona está dado por la siguiente expresión:

$W_{R/P} = \frac{1}{2} kx^2_i - \frac{1}{2} kx^2_f$ donde x_i y x_f, corresponden a las elongaciones respectivas. (6.7)

$$W_{R/P} = \frac{1}{2} kx^2_i - \frac{1}{2} kx^2_f \qquad (6.7)$$

$W_{R/P} = \frac{1}{2} kx^2_i - \frac{1}{2} kx^2_f = U_i - U_f = -\Delta U$ en terminos de energía potencial.

$W_{R/P} = U_i - U_f = -\Delta U \rightarrow$ esta forma de escribir el trabajo que el resorte hace sobre la persona es muy importante, ya que representa la defición de una fuerza conservativa que más adelante se explicará en detalle.

6.9 TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

Una fuerza $\vec{F}$ se aplica sobre un bloque de masa m y provoca un desplazamiento $\vec{S}$ como se indica en la figura 6.16

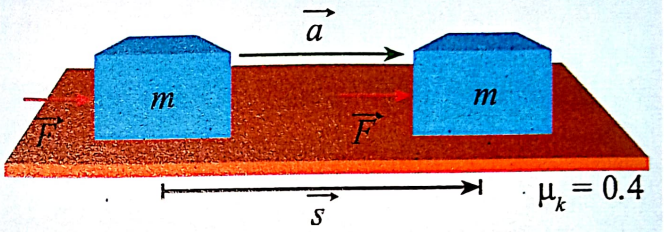


Figura 6.16

De acuerdo a la segunda ley de Newton, la fuerza neta es la masa multiplicada por la aceleración; y por lo tanto, el trabajo neto podría expresarse como:

$$W = FS = maS = m\left(\frac{v_f^2 - v_0^2}{2s}\right)S = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_0^2$$

Al término $\frac{1}{2} mv^2$ *se le conoce como energía cinética, K*

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA

$$W = K_f - K_0 = \frac{1}{2} mv_f^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \qquad (6.8)$$

De lo anterior se tiene que el trabajo neto, que corresponde a la sumatoria de todos los trabajos, es igual al cambio de energía cinética ΔK.

$$W = K_f - K_0$$

Ejemplo 6.7 - Se empuja un bloque de 20.0 kg de masa con una fuerza de 200N de magnitud que forma un ángulo $\theta = 30^o$ con la horizontal sobre una superficie horizontal de $\mu_k = 0.40$ como se indica en la figura 6.17. Si el bloque se desplaza 5.00 m y parte con una velocidad inicial de 1.0 m/s:

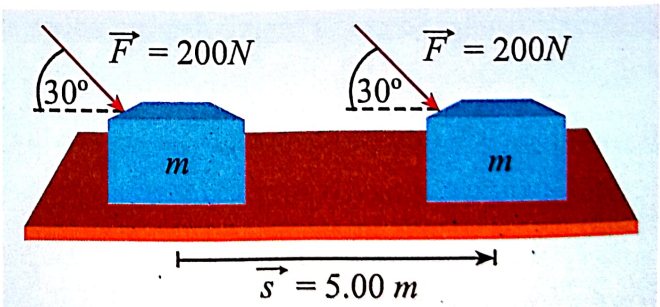


Figura 6.17

a) Calcular el trabajo neto.

b) Aplicando el **TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA**, calcular la velocidad que tiene el bloque a los 5.00 m de haberse desplazado.

c) Si en el instante en que el bloque se ha desplazado los $5.00\ m$, se retira la fuerza F, determinar el desplazamiento adicional hasta detenerse. Ver figura 6.18

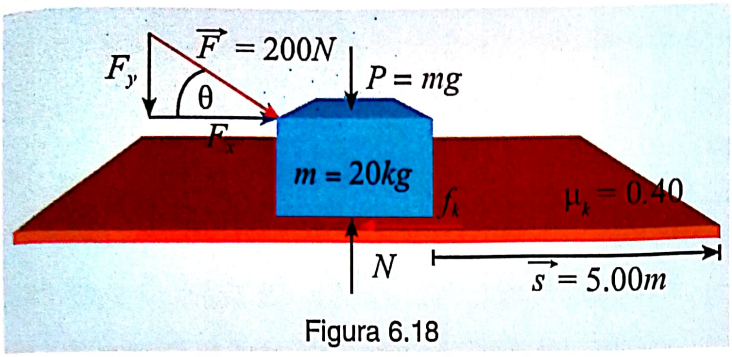


Figura 6.18

Solución

a) Calcular el trabajo neto.

Para calcular el trabajo neto se recomienda calcular el trabajo de cada una de las fuerzas.

Las componentes de $\vec{F}$ en los ejes x y y son:

$$F_x = F\cos\theta = 200N \times \cos 30^0 = 173\ N \qquad F_y = F\operatorname{sen}\theta = 200N \times \operatorname{sen} 30^0 = 100\ N$$

DETERMINAR LA FUERZA NORMAL

Para determinar la fuerza normal se debe igualar la sumatoria de fuerzas en y a cero y despejar la fuerza normal.

$$\sum F_y = 0 \rightarrow N - mg - F_y = 0$$

$$N = mg + Fy \rightarrow N = 20kg \times 9.8\frac{m}{s^2} + 100N = 296\ N$$

DETERMINAR LA FUERZA DE FRICCIÓN

Para determinar la fuerza de fricción se debe utilizar $f_k = \mu_k N$

$f_k = \mu_k N = 0.40 \times 296\ N = 118\ N$ *opuesta al movimiento.*

Calcular el trabajo realizado por cada una de las fuerzas.

El trabajo de cada una de las fuerzas se calcula con la ecuación 6.1 ($W = \vec{F} \cdot \vec{S} = FS\cos\theta$)

TRABAJO DE LA FUERZA F

El trabajo de la fuerza F será igual a $W_F = FS\cos\theta = 200\ N \times 5m \times \cos 30^0 = 866\ J$

TRABAJO DEL PESO Y LA FUERZA NORMAL

El trabajo del peso $W_P = mgS\cos 90^0 = 0J$

El trabajo de la normal $W_N = NS\cos 90^0 = 0J$

EL TRABAJO DE LA FUERZA DE FRICCIÓN

La fuerza de fricción y el desplazamiento forman un ángulo de 180°, por lo tanto el trabajo estará dado por la siguiente expresión:

$$W_{fk} = f_k S\cos 180^0 = -f_k S = -118.4\ N \times 5m = -592\ J$$

El trabajo neto o total es la sumatoria algebraica de todos los trabajos realizados por cada una de las fuerzas.

$$\sum W_i = W_F + W_P + W_N + W_{fk}$$

$$\sum W_i = 866\,J + 0 + 0 + 0 - 592\,J = +274\,J$$ Esto es el trabajo neto.

b) Aplicando la ecuación 6.7 del TEOREMA DEL TRABAJO Y ENERGÍA, calcular la velocidad que tiene el bloque a los $5.0\ m$ de haberse desplazado.

$$w_{NETO} = K_F - K_0 = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$274\,J = \frac{1}{2}\,20.0\,kg \times v_f^2 - \frac{1}{2}\,20.0\,kg\left(1.0\frac{m}{s}\right)^2 \rightarrow v_f = 5.33\,\frac{m}{s}$$

c) Si en el instante en que el bloque se ha desplazado los $5.0m$, se retira la fuerza F, determinar el desplazamiento adicional hasta detenerse.

En el momento en que se retira la fuerza F, cambia la magnitud de la normal y de la fuerza de fricción. En este desplazamiento solo realiza trabajo la fuerza de fricción, desconociéndose este desplazamiento. Ahora la fricción es $\mu_k N = \mu_k mg = 78.4\ N$ y esta sería la única fuerza que realiza el trabajo, entonces:

$$w_{NETO} = f_k \Delta x \cos 180° = K_F - K_O = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_o^2$$

$$-78.4\,N\Delta x = 0 - K_o = 0 - \frac{1}{2}(20\,kg)\left(5.33\,\frac{m}{s}\right)^2 \rightarrow \Delta x = 3.62\,m$$

6.10 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

La energía potencial gravitacional (U) es la energía que poseen todos los cuerpos de masa m en función de su posición y depende de un nivel de referencia que está dada por la siguiente expresión: $U = mgy$, unidades en Joules [J]; donde m es la masa del cuerpo, g es la aceleración de la gravedad, "y" es la posición con respecto a un nivel de referencia $N.R$ y esta posición puede ser positiva, negativa o cero. Ver figura 6.19

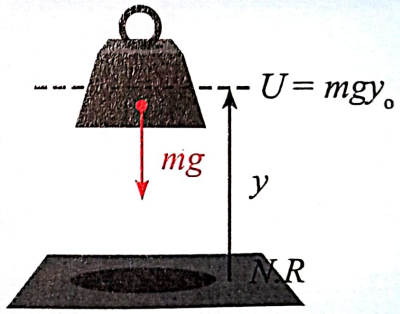


Figura 6.19

6.10.1 EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA GRAVITACIONAL EN FUNCIÓN DE LA ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Si lanzamos un cuerpo hacia arriba desde una altura y_o hasta una altura y_f, como se indica en la figura 6.20 se calculará el trabajo realizado por el peso.

El trabajo que realiza el peso se define como:

$$W = mg\Delta y \cos 180° = -\ mg\,(y_f - y_0)$$

$$W = -\ \Delta U = U_0 - U_f = mgy_0 - mgy_f \qquad (6.9)$$

Esta forma de escribir el trabajo de una fuerza gravitacional en terminos de la energia potencial gravitacional es muy importante, ya que representa la definición del trabajo de una fuerza conservativa que más adelante se explicará a detalle.

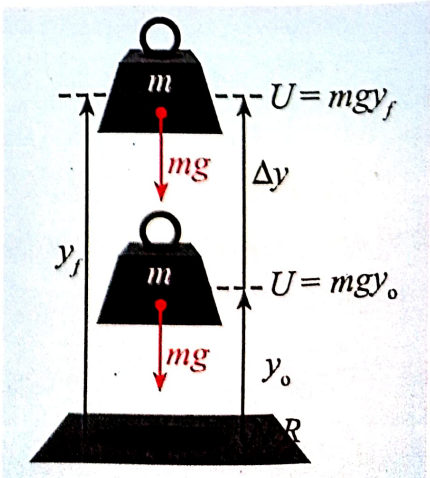


Figura 6.20

6.10.2 EL TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA ELÁSTICA EN FUNCIÓN DE LA ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

La energía potencial elástica de un resorte está dada por la siguiente expresión:

$U = \frac{1}{2} k x^2$ donde x es la elongación del resorte

El trabajo realizado por la fuerza elástica es: $W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f = \frac{1}{2} k x_i^2 - \frac{1}{2} k x_f^2$

6.11 FUERZAS CONSERVATIVAS

Una fuerza es conservativa si cumple las siguientes condiciones:

1. El trabajo de una fuerza conservativa es independiente de su trayectoria, solo depende de la posición inicial y final.

2. El trabajo de una fuerza conservativa en una trayectoria cerrada es exactamente igual a cero.

Un bloque de masa m se deja caer desde una altura h, en las dos trayectorias que se indican en figura 6.21, calcular el trabajo realizado por el peso del bloque en las dos trayectorias hasta que el bloque llegue a la base de los planos.

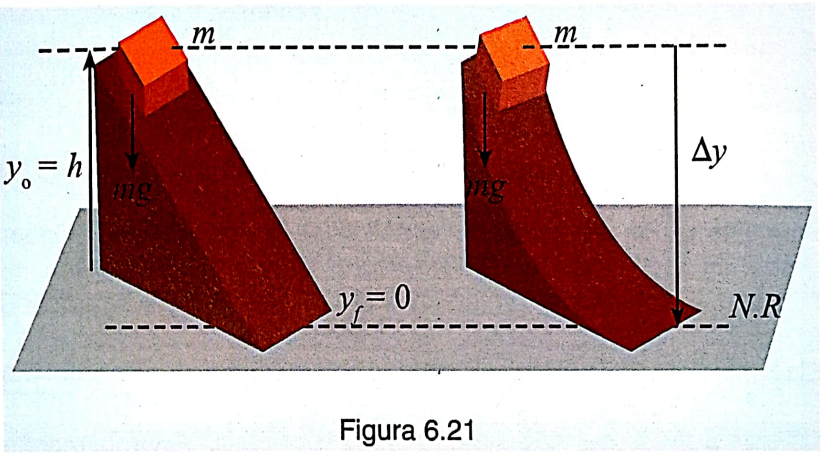


Figura 6.21

Para las dos trayectorias el trabajo del peso está dado por la siguiente expresión:

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f = mgy_0 - mgy_f = mgh - 0 = mgh$$

Si lanzamos el bloque de masa m verticalmente hacia arriba, este alcanzará una altura h y luego regresará hasta la misma posición de lanzamiento; entonces, el trabajo del peso en su trayectoria cerrada será exactamente igual a cero porque las energías potencial inicial y final son las mismas.

$$W = -\Delta U = -(U_f - U_0) = U_0 - U_f = 0$$

Por lo tanto, la fuerza gravitacional llamada peso es una fuerza conservativa. Así también lo es la fuerza elástica, la fuerza eléctrica, etc.

6.12 FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Una fuerza es NO conservativa si cumple las siguientes condiciones:

1. El trabajo de una fuerza NO conservativa depende de su trayectoria.

2. El trabajo de una fuerza NO conservativa en una trayectoria cerrada NO es igual a cero.

Un bloque de masa m recorrerá una trayectoria cerrada, cuadrada de lado d, sobre una mesa horizontal como se observa en la vista superior de la figura 6.22. Si la fuerza de fricción es f_k, determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción durante toda su trayectoria.

El trabajo de la fuerza de fricción en cada lado es - $f_k d$ y el trabajo en toda su trayectoria es - $4f_k d$; por lo tanto, el trabajo de la fuerza de fricción si depende de la trayectoria, y en una trayectoria cerrada el trabajo es diferente de cero.

Por lo tanto, la fuerza de fricción cinética es una fuerza ***NO CONSERVATIVA***.

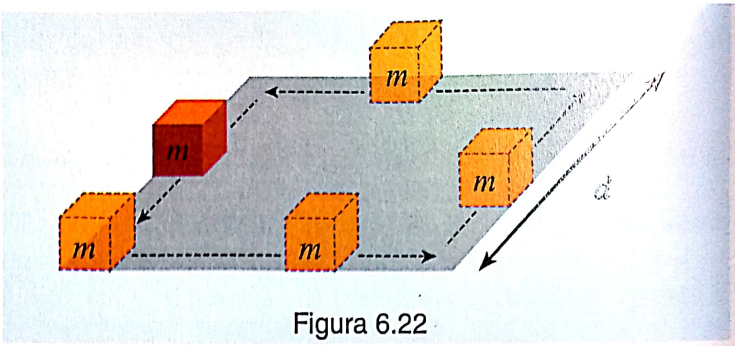


Figura 6.22

6.13 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

Como se conoce que el trabajo neto es igual al cambio de energía cinética de acuerdo al teorema del trabajo y la energía (esto fue explicado en la página 236 - Ecuación 6.8).

$$Wneto = K_f - K_0$$

Si consideramos que todas las fuerzas son conservativas, entonces tenemos un sistema conservativo, y por lo tanto el trabajo neto estará dado en función de la energía potencial.

$$W_{neto} = U_0 - U_f$$

Por lo tanto, se puede igualar el trabajo neto y se obtiene la siguiente expresión:

$$U_0 - U_f = K_f - K_o \rightarrow U_0 + K_o = U_f + K_f$$

El término $U + K$ es lo que se conoce con el nombre de Energía Mecánica E.

$E_0 = U_0 + K_0$	Energía mecánica inicial.	(6.9)
$E_f = U_f + K_f$	Energía mecánica final.	(6.10)
$U_0 + K_0 = U_f + K_f$	Energía mecánica constante.	(6.11)

Por lo tanto, para sistemas conservativos la Energía Mecánica Total se mantiene constante: $E_0 = E_f$.

El término U representa la suma de la energía potencial gravitacional (mgy) y la energía potencial elástica $\left(\frac{1}{2} kx^2\right)$.

Ejemplo 6.8 - Se deja caer un bloque de masa m desde el punto A como se indica en la figura 6.23. Se pide:

a) Calcular la velocidad del bloque en el punto B.

b) Si se conoce que la masa $m = 10.0\ kg$ y el radio $R = 2.00\ m$, calcular la energía total mecánica en el punto C, con respecto al nivel de referencia indicado en la figura.

Solución

a) Calcular la velocidad del bloque en el punto B.

Como el sistema es conservativo la energía mecánica se conserva.

$U_0 + K_0 = U_f + K_f$ La energía mecánica es constante

$$mg(3R) + 0 = mg\,(2R) + \frac{1}{2} mv^2 \rightarrow v = \sqrt{2(3gR - 2gR)}$$

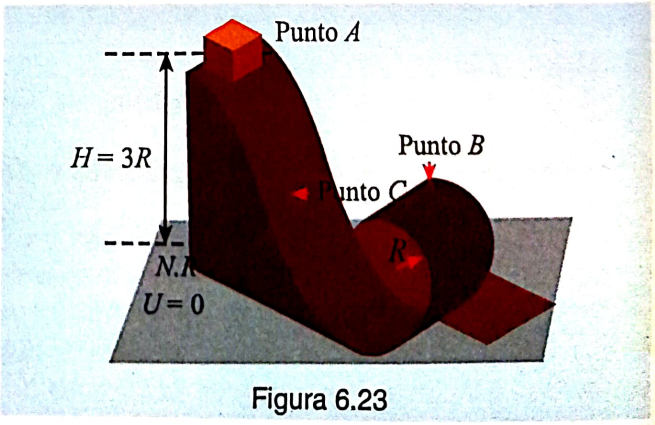


Figura 6.23

$$v = \sqrt{2(1gR)} = \sqrt{2\,(9.8m/s^2 \times 2.00m)} = 6.26\ m/s,$$ velocidad en B

b) Calcular la energía total mecánica en el punto C.

$E = 10.0\ kg \times 9.8\ m/s^2 \times 3 \times 2.00\ m = 588\ J$ es la misma en A, B y en C.

Ejemplo 6.9 - Un bloque de $20.0\ kg$ comprime un resorte de $K = 1500\ N/m$ una distancia de $0.600\ m$ desde su posición de equilibrio. Si el bloque y resorte descansan sobre un plano inclinado de 30°, y si el plano inclinado es de fricción despreciable como se muestra en la figura 6.24, calcular la máxima altura H que alcanza el bloque, medida desde su punto de lanzamiento.

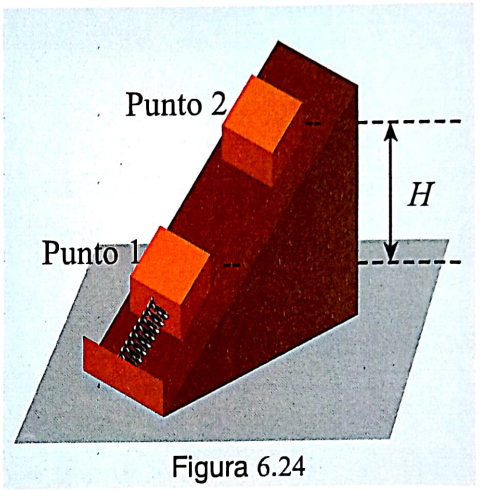


Figura 6.24

Solución

Como en el sistema solo hay fuerzas gravitacionales y elásticas, el sistema es conservativo y se aplica conservación de la energía mecánica entre los puntos 1 y 2.

$$U_1 + K_1 = U_2 + K_2$$ La energía mecánica es constante

$$U_{1grav} + U_{1elast} + K_1 = U_{2grav} + U_{2elast} + K_2$$

$$0 + \frac{1}{2}kx_1^2 + 0 = mgH + 0 + 0 \rightarrow H = \frac{1}{2mg}kx_1^2$$

$$H = \frac{1}{2mg}kx_1^2 = \frac{1}{2 \times 20.0kg \times 9.8m/s^2}(1500\ N/m)(0.600m)^2 = 1.38\ m$$

6.14 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA PARA SISTEMAS CON FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Del teorema del trabajo y la energía se tiene que el trabajo neto es la sumatoria de los trabajos de las fuerzas conservativas y las no conservativas y esto será igual al cambio de energía cinética.

$$W_{neto} = K_f - K_o$$

$$W_{neto} = W_{FC} + W_{FNC} = K_f - K_o$$

$W_{FC} = U_0 - U_f$, es el trabajo de las fuerzas conservativas (explicado en la página 240)

$$W_{neto} = U_o - U_f + W_{FNC} = K_f - K_o$$

Despejando el trabajo de las fuerzas no conservativas se tiene la siguiente expresión:

$W_{FNC} = (U_f + K_f) - (K_o + U_o) = E_f - E_0 = \Delta E$	conservación de la energía (6.12)
$E_f = U_f + K_f$	energía mecánica final (6.13)
$E_0 = K_o + U_o$	energía mecánica inicial (6.14)

Por lo tanto, el trabajo de las fuerzas no conservativas está dado por la diferencia de la energía mecánica $W_{FNC} = E_f - E_0$ o $W_{FNC} = \Delta U + \Delta K$.

En los sistemas donde intervienen fuerzas ***NO CONSERVATIVAS*** la energía mecánica ***NO SE CONSERVA.***

Ejemplo 6.10 - Un bloque de masa m se suelta desde el reposo en la posición A y recorre un cuadrante de circunferencia de radio $R = 4.0\ m$ sin fricción, hasta llegar al punto B como se indica en la figura 6.25; luego sigue una trayectoria rectilínea sobre una pista horizontal de $\mu_k = 0.45$. Se pide:

a) Calcular la velocidad del bloque cuando abandona el cuadrante (en el punto B).

b) Calcular la distancia que recorre el bloque sobre la pista horizontal hasta detenerse en el punto C.

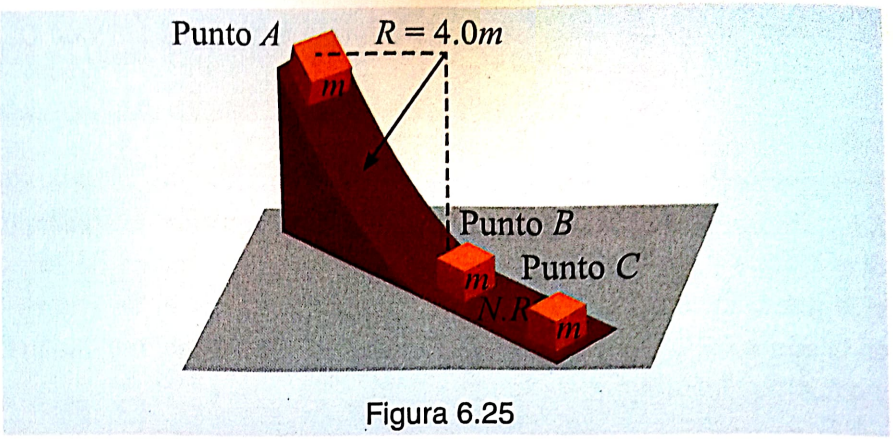


Figura 6.25

Solución

En el cuadrante circular no hay fricción por lo tanto la energía mecánica se conserva entre los puntos A y B.

$$U_A + K_A = U_B + K_B \text{ La energía mecánica es constante}$$

$$mgR + 0 = 0 + \frac{1}{2}mV_B^2 \rightarrow V_B = \sqrt{2gR} = \sqrt{2 \times 9.8 m/s^2 \times 4.0 m} = 8.9\ m/s$$

Para analizar el tramo de B hasta C debe considerar que existe trabajo de las fuerzas no conservativas.

$$W_{FNC} = (U_C + K_C) - (K_B + U_B) = (0 + 0) - (1/2\ mv_B^2 + 0)$$

$$-\mu_k mgd = -(1/2\ mv_B^2 + 0)$$

$$\mu_k mgd = 1/2\ mv_B^2 \rightarrow d = \frac{1}{2\mu_k g} v_B^2 = \frac{(8.9 m/s)^2}{2 \times 0.45 \times 9.8 m/s^2} = 8.9\ m$$

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

TRABAJO Y ENERGIA

Actividad 6.1

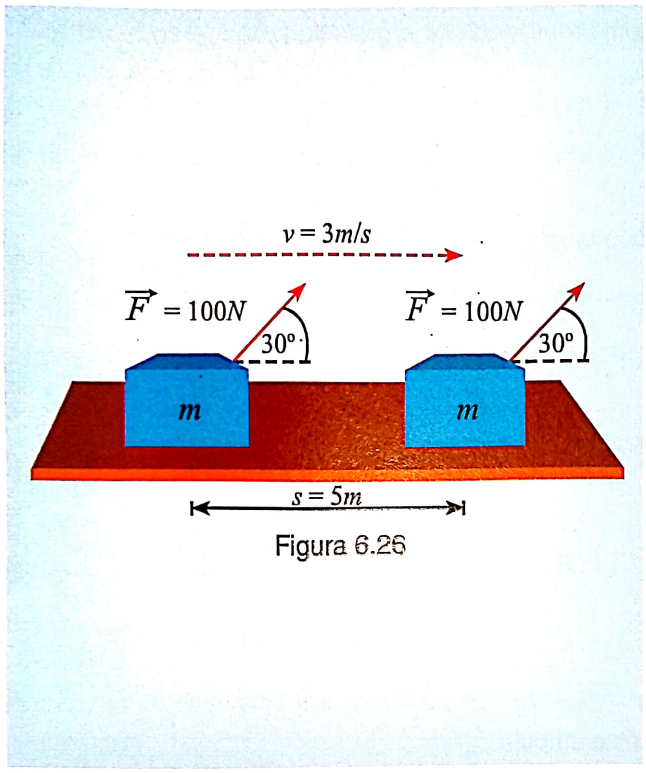


Figura 6.26

Se aplica una fuerza $F = 100\ N$ formando un ángulo de $30°$ con la horizontal sobre un bloque de $200\ kg$ como se indica en la figura 6.26. El bloque se mueve a velocidad constante de $3.00\ m/s$ y se desplaza $5.00\ m$. Se pide:

a) Calcular el trabajo que la fuerza $\vec{F}$ realiza sobre el bloque

b) Calcular el trabajo que la fuerza de fricción realiza sobre el bloque.

c) Calcular el trabajo neto realizado sobre el bloque

Actividad 6.2

Un objeto de masa $m = 2.00\ kg$ se mueve bajo la acción de una fuerza variable que hace que el objeto incremente su rapidez desde $1.0\ m/s$ hasta $5.0\ m/s$. Determinar el trabajo neto sobre el objeto.

Actividad 6.3

Se suelta un bloque de $40\ kg$, desde el punto A, en una pista como se muestra en la figura 6.27. Calcular el trabajo realizado por el peso para ir del punto A hasta el punto B.

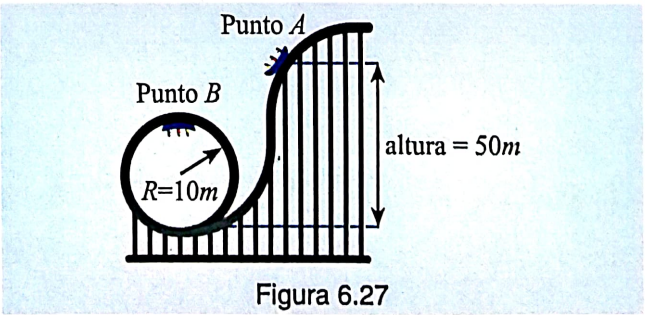


Figura 6.27

Actividad 6.4

Sobre un bloque de masa m se aplica una fuerza $\vec{F}$ constante paralela a la superficie horizontal sin fricción en la cual el bloque se desplaza. Después que el bloque se ha desplazado una distancia d, la fuerza $\vec{F}$ súbitamente desaparece, entonces la alternativa correcta es:

a) Durante el movimiento de la distancia d, el trabajo neto es CERO.

b) El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ es igual al trabajo realizado por la gravedad y la fuerza Normal.

c) Después que la fuerza $\vec{F}$ desaparece, el bloque continúa moviéndose con rapidez constante.

d) Cuando la fuerza $\vec{F}$ desaparece, el bloque empieza a disminuir su rapidez hasta detenerse.

Actividad 6.5

Una fuerza F se aplica sobre el bloque de $30\ kg$ de masa y éste empuja a un bloque de $10\ kg$ como se indica en la figura 6.29.

Si el sistema constituido por los dos bloques parte desde el reposo y alcanza una velocidad de $10\ m/s$ desplazándose $10\ m$ sobre una superficie horizontal plana y sin fricción. Utilizando métodos energéticos, se pide:

a) Determinar el trabajo neto sobre el sistema

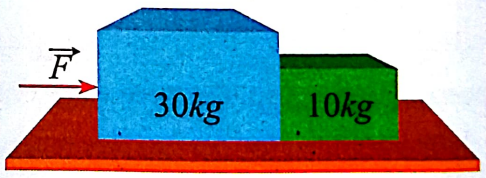


Figura 6.29

b) Determinar la magnitud de F en Newtons.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 6.6

Una metrovía sin pasajeros tiene masa m y se mueve con rapidez constante v. Si en una estación se llena en toda su capacidad y su masa total es $1.25\ m$ y se mueve a velocidad constante de $v_2 = 0.75\ v$. Determine la relación entre las energías cinéticas de la metrovía con pasajeros y sin pasajeros.

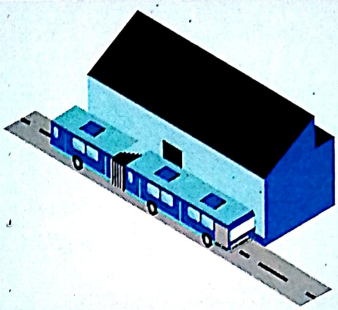


Figura 6.30

POTENCIA

Actividad 6.7

Calcular y ordenar ascendentemente las potencias que un motor de un ascensor desarrollaría en las siguientes situaciones:

a) Llevar a 5 personas de $60\ kg$ cada una a $50m$ de altura en un tiempo de $15s$.

b) Llevar a 5 personas de $92kg$ cada una a $15m$ de altura en un tiempo de $50s$.

c) Llevar a 5 personas de $75kg$ cada una a $28m$ de altura en un tiempo de 1 minuto.

Actividad 6.8

Un motor eléctrico se lo usa para levantar un ascensor como se indica en la figura 6.31, a velocidad constante. La capacidad máxima de carga del ascensor es $M = 1000\ kg$ y entre los rieles laterales del ascensor existe una fuerza de fricción total de $300\ N$. Si el ascensor parte del reposo para ascender con una aceleración $1.5\ m/s^2$, determinar la potencia del motor a los dos segundos de su movimiento.

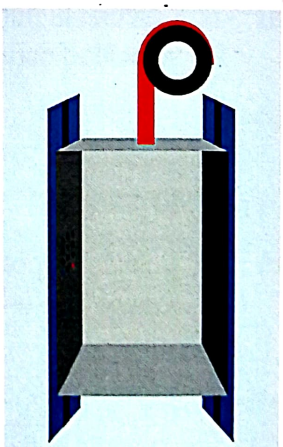


Figura 6.31

Actividad 6.9

Un motor eléctrico levanta un ascensor de masa 1000 kg desde el reposo hasta una velocidad de 5.00 m/s durante 10.0 s. Determinar la potencia media desarrollada por el motor.

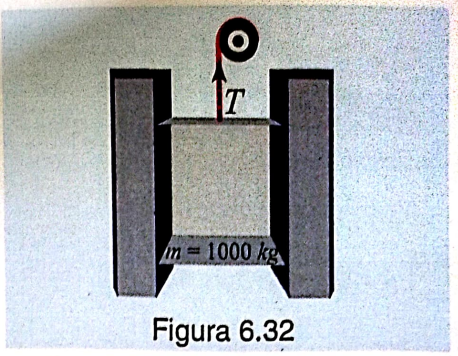


Figura 6.32

Actividad 6.10

Un motor eléctrico de 26250 $Watt$ de potencia sube un ascensor a velocidad constante de 2.00 m/s. La fricción total con los rieles laterales es 1000 N. Determine la masa total del ascensor.

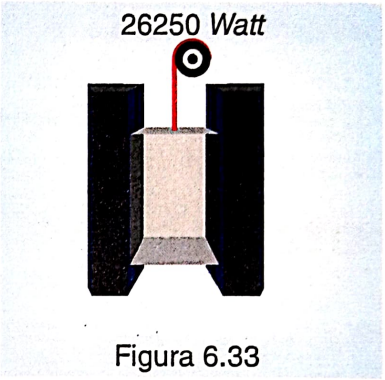


Figura 6.33

Actividad 6.11

Un bloque de masa $m = 100\ kg$ se mueve sobre un plano inclinado $\theta = 30°$ como se muestra en la figura 6.34.

El coeficiente de rozamiento cinético entre el bloque y la superficie del plano inclinado es $u_k = 0.30$ y asciende con una rapidez constante de 6.0 m/s. Si el bloque es arrastrado por un motor, se pide:

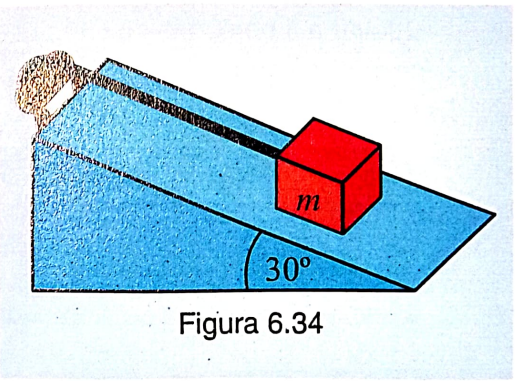


Figura 6.34

a) Calcular la mínima potencia que debe tener el motor para mover el bloque sobre el plano inclinado a velocidad constante.

b) Calcular la potencia en función de la velocidad del motor para que pueda subir el bloque partiendo del reposo con una aceleración de 1.0 m/s^2

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

TRABAJO DE FUERZA VARIABLE

Actividad 6.12

Si sobre un cuerpo se aplica una fuerza como se indica en la figura 6.35. Determinar el trabajo neto realizado por la fuerza $\vec{F}$.

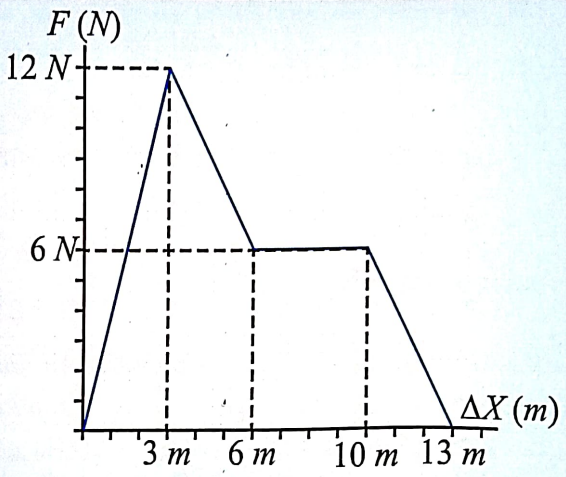


Figura 6.35

Actividad 6.13

Se aplica una fuerza F a un bloque de 10.0 kg como se muestra en la siguiente figura 6.36. Se pide:

a) Determinar el trabajo neto.

b) Si el bloque parte del reposo, determinar la velocidad final cuando se ha desplazado 3.00m.

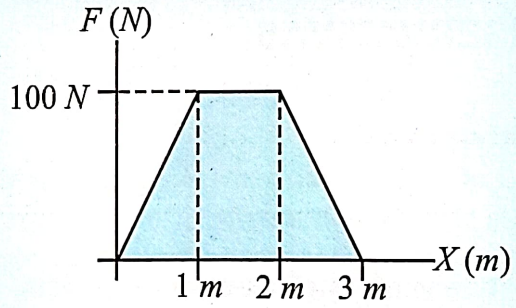


Figura 6.36

FUERZA VARIABLE DE UN RESORTE Y ENERGIA POTENCIAL ELASTICA

Actividad 6.14

En la figura 6.37 se muestra la variación de la fuerza elástica F_e de un resorte en función de la deformación x. Determinar la energia potencial elastica del resorte cuando este se estire 6.00 m.

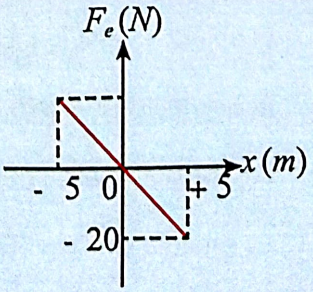


Figura 6.37

Actividad 6.15

En la siguiente figura 6.38 se muestra un resorte de $0.8\ m$ de largo que se estira desde su posición de equilibrio hasta una longitud de $1.5m$ cuando se coloca una masa m en su punto inferior. Si cuando el resorte está estirado tiene $25\ J$ de energía potencial elástica, calcular el valor de su constante elástica.

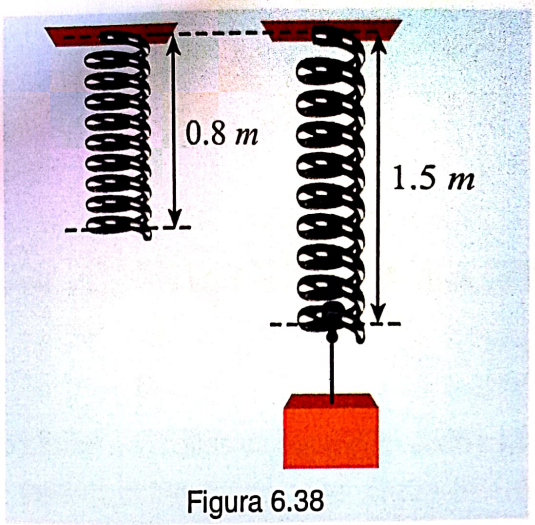


Figura 6.38

Actividad 6.16

Un objeto unido a un resorte se hala $10\ cm$ desde su posición de equilibrio. Cuando es liberado posee una aceleración inicial de $3\ m/s^2$. Si el objeto se halara únicamente $5\ cm$ desde su posición de equilibrio, ¿Cuál sería su aceleración inicial?

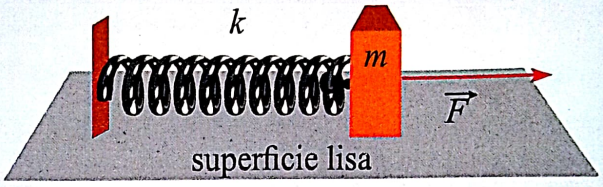


Figura 6.39

CONSERVACIÓN DE LA ENERGIA PARA SISTEMAS CON FUERZAS CONSERVATIVAS

Actividad 6.17

Escoja la alternativa ***incorrecta***

a) La energía cinética siempre es positiva.

b) Si en el sistema solo actúan fuerzas gravitacionales y elásticas, entonces, la energía total mecánica se mantiene constante.

c) La energía total mecánica es siempre positiva.

Actividad 6.18

Un objeto A de masa m y otro objeto B de masa $2m$ se sueltan desde la misma altura sobre la superficie de la Tierra. Después de que han transcurrido $5\ s$:

a) El objeto A tiene igual energía potencial que el objeto B.

b) El objeto A y el objeto B tienen la misma energía cinética.

c) La energía cinética del objeto B es el doble de la energía cinética del objeto A.

d) La energía cinética del objeto B es el cuádruplo de la energía cinética del objeto A.

e) (a) y (b) son correctas.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 6.19

Un objeto de masa igual a 20 kg se encuentra a 30 m de altura sobre el suelo..

Suponiendo que el objeto se suelta desde el reposo ¿cuál será la energía mecánica que posee a 10 m del suelo? ***Suponga el nivel de referencia en el suelo.***

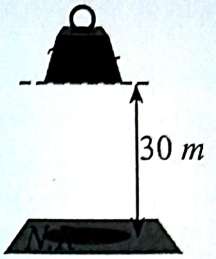


Figura 6.40

Actividad 6.20

Una piedra se suelta desde lo alto de una colina y cae libremente hasta alcanzar el suelo. Represente en un mismo gráfico la energía cinética y potencial en función del tiempo de caída de la piedra. Considere el sistema de referencia en el suelo.

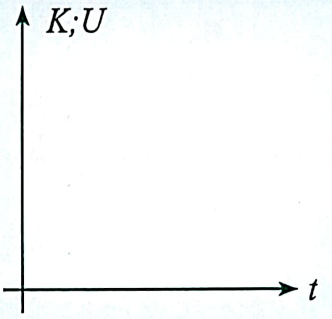


Figura 6.41

Actividad 6.21

Una esfera en un péndulo simple se encuentra suspendida de una cuerda de masa despreciable de 1.5 m de longitud a una altura de 1.0 m como se muestra en la figura. La esfera que tiene una masa de 1.5 kg se suelta desde el reposo y oscila como un péndulo simple. Considerando el nivel de referencia ubicado en la parte más baja de su trayectoria, se pide:

a) ¿Cuál es la energía mecánica total de la esfera en la parte más baja de la trayectoria del péndulo?

b) Calcular la velocidad de la esfera en la parte más baja de su trayectoria.

c) Calcular la tensión de la cuerda cuando la esfera está en la parte más baja de su trayectoria.

d) ¿Qué fuerza que actúa sobre la esfera realiza trabajo distinto de cero, explique?

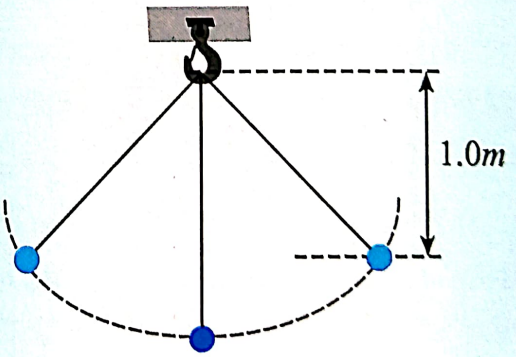


Figura 6.42

Actividad 6.22

Sobre un bloque de masa $m = 2.0\ kg$ se aplica una fuerza constante de $20.0\ N$ con un ángulo de $30°$ con la horizontal, como se muestra en la figura 6.43.

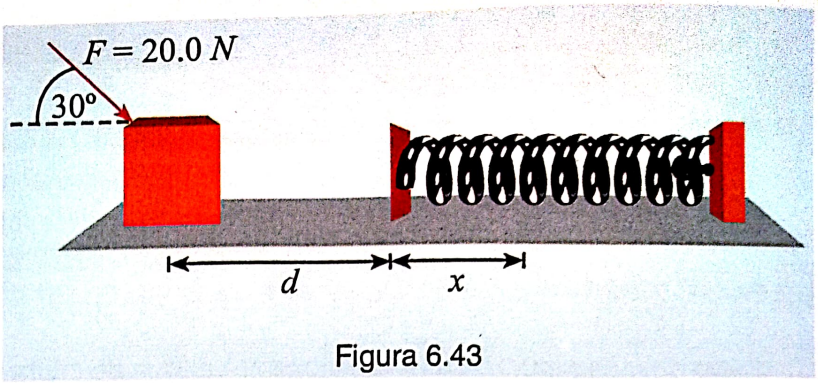


Figura 6.43

Si el bloque parte del reposo y se desplaza una distancia $d = 4.0\ m$, sobre una superficie horizontal y sin fricción y luego comprime al resorte de constante K=500 N/m, una distancia x y se detiene. Se pide:

a) Calcular la velocidad del bloque al momento de impactar en el resorte.

b) Calcular la distancia x que se comprime el resorte hasta que el bloque se detiene.

Actividad 6.23

Desde el punto A de la figura 6.44 se suelta un bloque, de $1.0\ kg$ de masa, el mismo que se desliza a lo largo de la pista AB. En el punto B la velocidad del bloque es de $3.0\ m/s$.

a) Calcule el trabajo hecho por la fricción en el tramo AB.

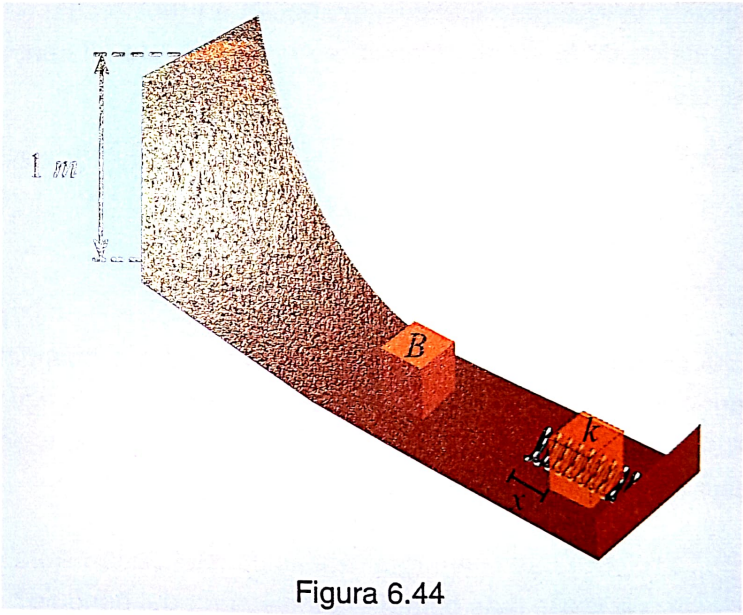


Figura 6.44

b) Si la pista BC es lisa y horizontal, el resorte de constante $k = 900\ N/m$ está sin deformar, calcule la deformación máxima (x) que experimenta el resorte por la compresión del bloque.

Nombre: ..... Paralelo: ..... Fecha .....

Actividad 6.24

Un collarín de masa 16 kg se desliza verticalmente partiendo del reposo desde la posición A hasta la posición B, como se indica en la figura 6.45. Si el resorte tiene una constante elástica de k=1500 N/m y una longitud natural de L=1.2 m. Se pide:

a) Calcular la energía total mecánica considerando que el nivel de referencia está ubicado en la posición B.

b) Calcular la velocidad del collarín cuando pasa por la posición B.

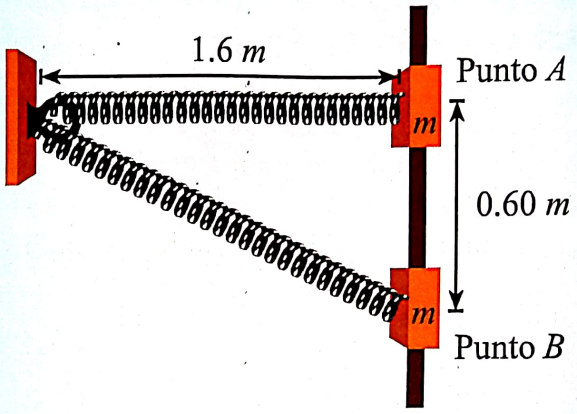


Figura 6.45

Actividad 6.25

Desde el punto A de la figura 6.46 se suelta un bloque de 1.0 kg que recorre la pista sin fricción mostrada en la figura. El radio de la parte circular es r = 1.0 m y H = 3.0 m.

a) Calcule la magnitud de la fuerza total que el bloque experimenta en el punto C que se encuentra a 45° con respecto a la horizontal.

b) Calcule el valor de H para que cuando el bloque pase por la parte más alta de la pista circular, esta ejerza sobre el bloque una fuerza igual a dos veces su peso.

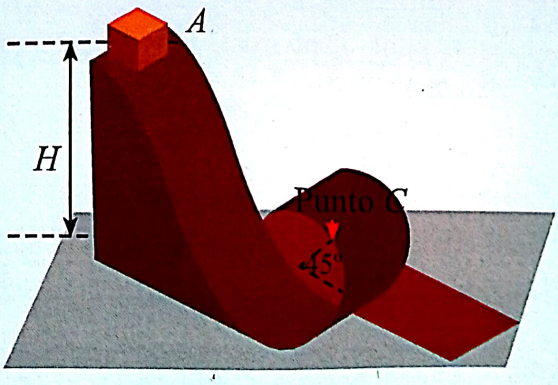


Figura 6.46

Actividad 6.26

En el sistema mostrado en la figura 6.47 se tienen dos masas de 10.0 y 20.0 kg respectivamente. Si el sistema parte desde el reposo y la masa de 20.0 kg está inicialmente a 3.0 m sobre el piso. Utilizando conservación de la energía determinar la velocidad con que impacta el bloque de 20.0 kg sobre el piso.

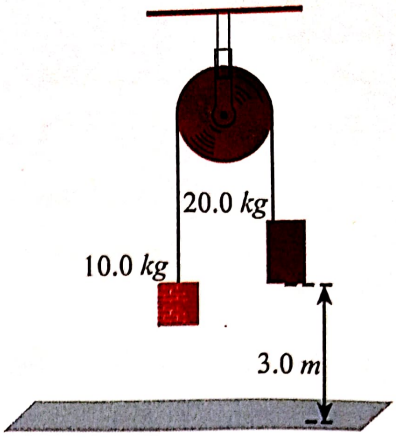


Figura 6.47

Actividad 6.27

Un bloque de masa m está comprimiendo un resorte una distancia x. Una vez que el bloque es soltado se mueve a lo largo de la superficie lisa ABC, como se muestra en la figura 6.48.

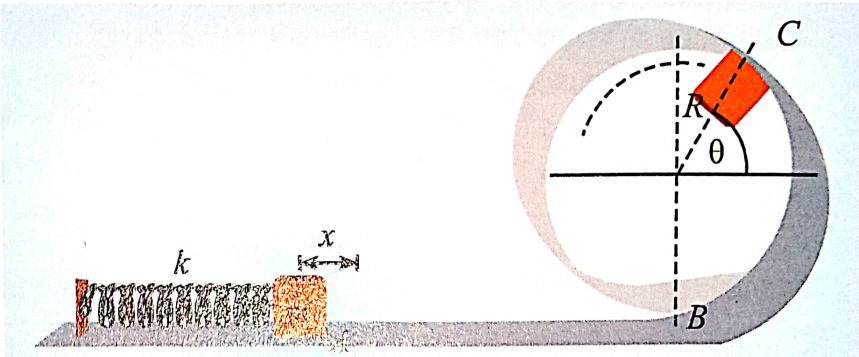


Figura 6.48

Cuando el objeto alcanza el punto C, se desprende de la superficie circular y continua moviéndose como partícula libre. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a) En el punto C la energía cinética del bloque es igual a cero.

b) La energía potencial del bloque en el punto C es igual a la energía elástica inicial del resorte.

c) La fuerza Normal que la pista circular ejerce sobre el bloque en el punto C es $mgcos\theta$.

d) La fuerza centrípeta que experimenta el bloque es $mgsen\theta$.

e) En el punto C no existe fuerza centrípeta porque el bloque se desprende de la superficie circular en ese punto.

Actividad 6.28

Un jugador de fútbol patea un balón de masa 1.0 kg proporcionándole una velocidad de 33.0 m/s con un ángulo de 45° respecto a la horizontal, considerando el nivel de referencia en el punto de lanzamiento del balón, se pide:

Figura 6.49

a) Determinar la energía cinética del balón a un tercio de la altura máxima.

b) Determinar la energía potencial del balón en su altura máxima.

c) Determinar la energía total mecánica a dos tercios de su altura máxima.

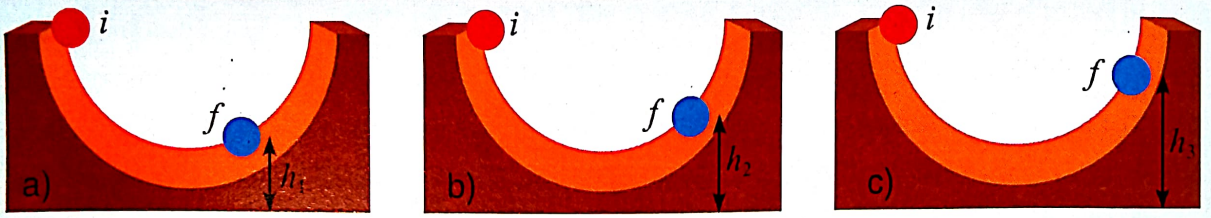
Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

CONSERVACIÓN DE LA ENERGIA PARA SISTEMAS CON FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Actividad 6.29

Considerando el sistema de referencia en la base de la figura 6.50, ¿en cuál sistema habrá mayor energía potencial?. Explique su respuesta.

Suponiendo que un cuerpo se suelta desde el reposo del punto (i), y se detiene en el punto (f)



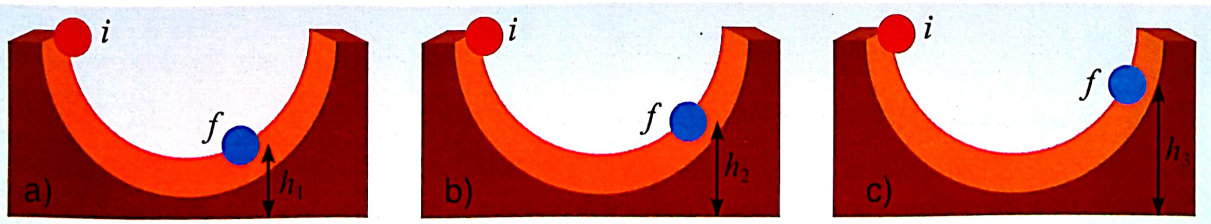
$h_1 < h_2 < h_3$

Figura 6.50

Actividad 6.30

Con relación a la figura mostrada. ¿En cuál sistema existirá mayor pérdida de energía debido a la fricción?.

Suponiendo que un cuerpo se suelta desde el reposo del punto (i), y se detiene en el punto (f)



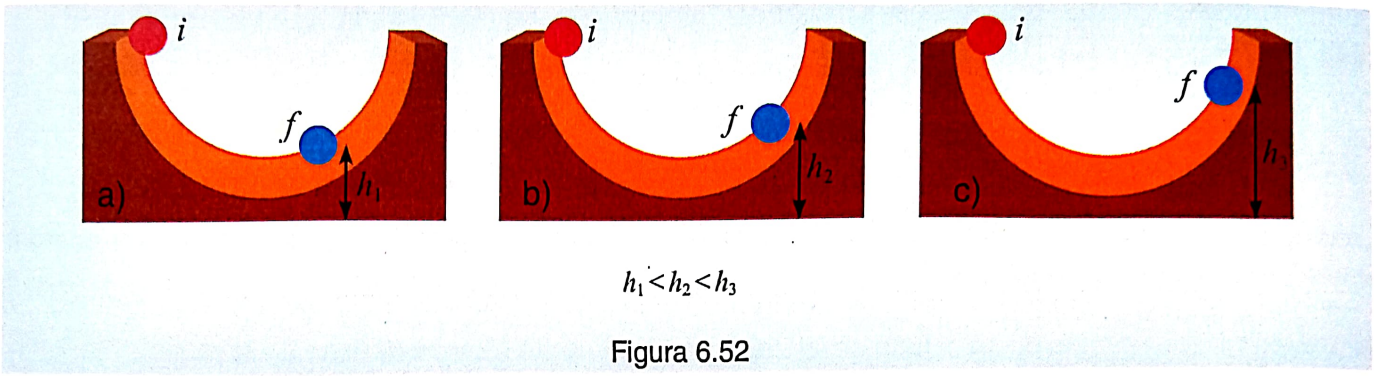
$h_1 < h_2 < h_3$

Figura 6.51

Actividad 6.31

Con relación a la figura mostrada. ¿En cuál de los sistemas hay mayor trabajo neto y en cuál el trabajo de la fuerza gravitacional es mayor?.

Suponiendo que un cuerpo se suelta desde el reposo del punto (i), y se detiene en el punto (f)



$h_1 < h_2 < h_3$

Figura 6.52

Actividad 6.32

Un bloque de masa m=1.0 kg es lanzado sobre una superficie horizontal con una velocidad de 10.0 m/s, como se muestra en la figura 6.53. Los coeficientes de fricción cinético y estático entre el bloque y el piso son 0.20 y 0.40 respectivamente. Utilizando métodos energéticos se pide:

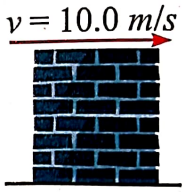


Figura 6.53

a) Determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción hasta que el bloque se detenga.

b) Determinar el desplazamiento total del bloque.

Nombre: ..... Paralelo: ..... fecha .....

Actividad 6.33

Un carro con rapidez inicial se encuentra en la parte inferior de una pista sin fricción excepto en un tramo horizontal de $15.0\ m$ de longitud y u_k de 0.25 como se indica en la figura 6.54

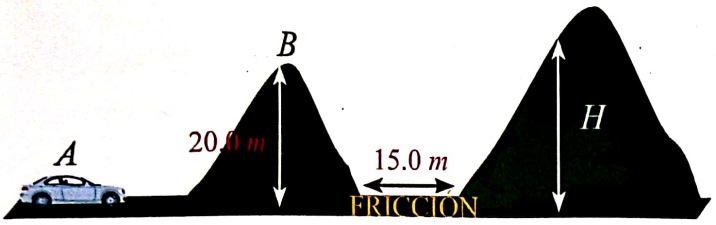


Figura 6.54

a) ¿Cuál será la mínima rapidez inicial del carro en el punto A para que pueda pasar la primera colina de $20\ m$ de altura?

b) Conociendo que el carro pasa por el punto A con una rapidez de $30.0\ m/s$, determine la altura H que alcanza el carro en la segunda colina.

Actividad 6.34

Un cazador desea probar su rifle en la selva para lo cual dispara con v_0 en dirección de 8 árboles que se encuentran alineados y se observa que el proyectil logra atravesar justo dos árboles, quedándose el proyectil incrustado a punto de salir del segundo árbol, ¿cuál debe ser el valor de la velocidad inicial para que justo logre atravesar los 8 árboles?

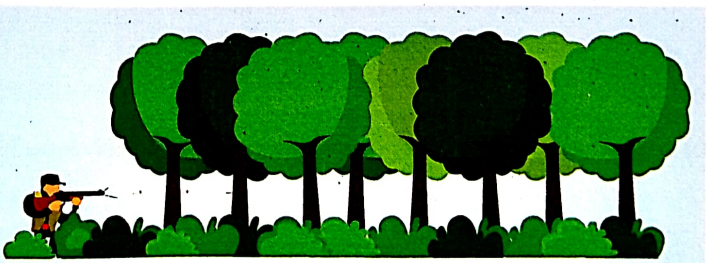


Figura 6.56

Actividad 6.35

Se deja caer un bloque de masa 2.0 kg desde el punto A como se muestra en la figura 6.57 y recorre una trayectoria curva de A hasta B en superficie lisa, luego recorre de B hasta C en una superficie rugosa con $u_k = 0.30$ hasta detenerse, comprimiendo un resorte de constante elástica $k = 1200\ N/m$, una distancia $x = 0.50\ m$. Usando métodos energéticos, determine la altura h desde donde se dejó caer el bloque.

Nota: En los 3.00 metros no se incluye la compresión $x = 0.50\ m$ del resorte.

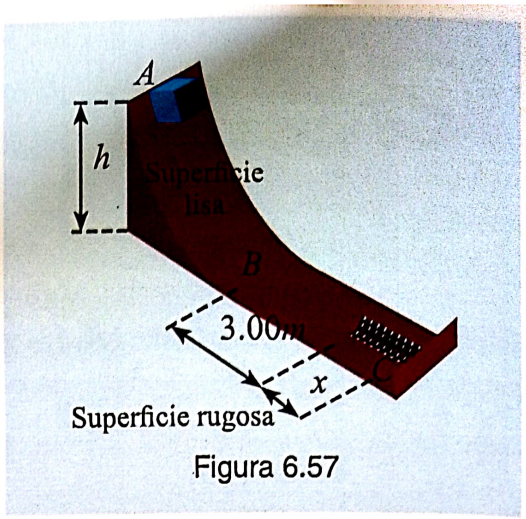


Figura 6.57

Actividad 6.36

Un niño de masa 50.0 *kg* se suelta desde lo alto de un tobogán de 10.0 m de altura, el niño se impulsa y sale de la parte superior del tobogán a una rapidez de 1.00 *m/s*. El niño abandona el tobogán en la parte inferior con una rapidez de 10.0 *m/s*. Considerando que el nivel de referencia se encuentra en la parte más baja del tobogán. Se pide:

a) Calcular la energía total mecánica en la parte alta y en la parte inferior del tobogán.

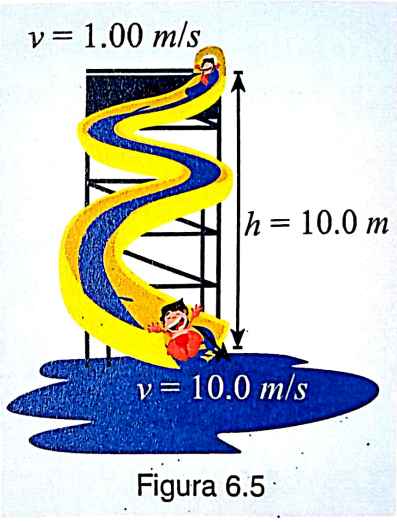


Figura 6.5

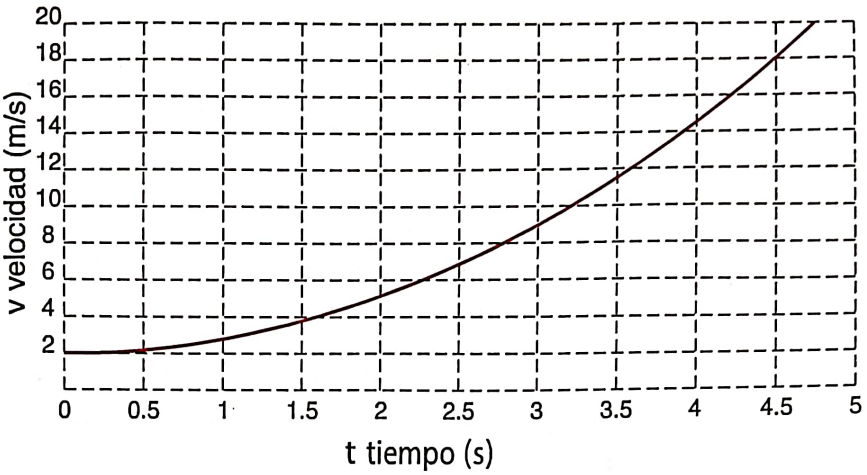
b) Determinar el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el niño.

Nombre: ..... Paralelo: .....

EN LOS PROBLEMAS PROPUESTOS TRABAJAR CON $g = 10\ m/s^2$

6.1 El gráfico mostrado de velocidad versus tiempo representa el movimiento de un objeto de masa $m = 2.0\ [kg]$ sobre una superficie inclinada con un coeficiente de rozamiento cinético de $\mu_k = 0.2$ y una inclinación de $\theta = 30°$.

Determine el trabajo neto del objeto desde el punto de partida $t = 0\ s$ hasta los $4.5\ s$.

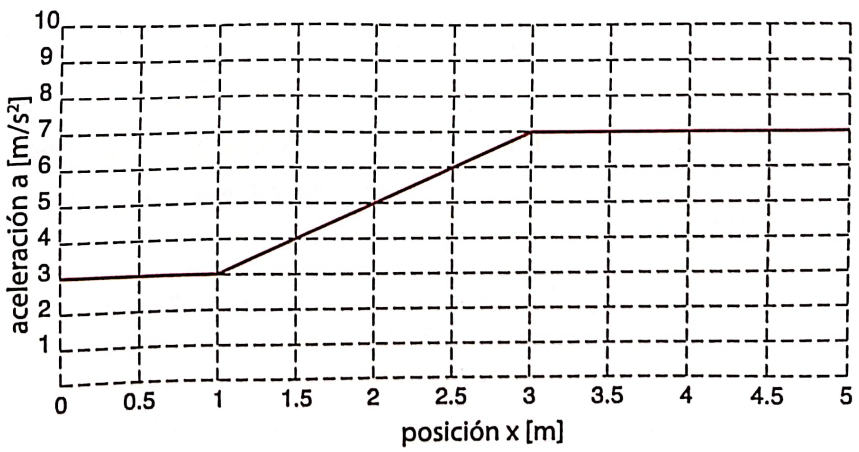


6.2 Un pintor se encuentra a $5.0\ m$ de altura sobre un andamio pintando un edificio. Si por un descuido se deja caer uno de los tarros de pintura de $5.0\ kg$, ¿cuál sería el trabajo realizado sobre aquel tarro de pintura hasta llegar al suelo?

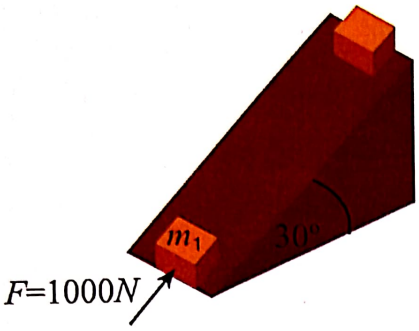
6.3 Si a un resorte de constante elástica k_1 se lo deforma una distancia de x_1 y a otro resorte de constante elástica k_2 se lo deforma tres veces la longitud x_1, además el cambio de energía ejercido en cada uno de los resortes por el estiramiento es el mismo, entonces, ¿cuál sería la relación de las constantes de cada resorte K_2 / K_1?

6.4 Un carro de juguete de $1.0\ kg$ de masa se mueve sobre una trayectoria circular de radio $2.0\ m$ a rapidez constante de $5.0\ m/s$. Si su desplazamiento es de $\vec{S} = -\ 2.0\ i + 2.0\ j$. ¿Cuál fue el trabajo neto durante todo el recorrido?

6.5 El gráfico de la figura de aceleración versus posición corresponde el movimiento de un cuerpo de masa $m = 2.0$ $[kg]$ sobre una superficie plana. Determine el trabajo neto del objeto durante todo su recorrido.



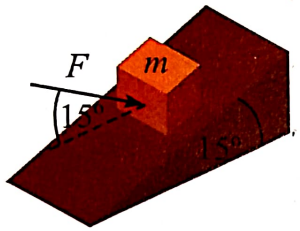
6.6 Se aplica una fuerza F de $1000\ N$ sobre el bloque de masa m_1, paralela al plano inclinado $30°$, como se indica en la figura. Si la masa m_1 es de $50.0\ kg$ y el desplazamiento del bloque es $3.00\ m$. (Se considera superficies lisas)



a) Determine el trabajo realizado por la fuerza F y por el peso.

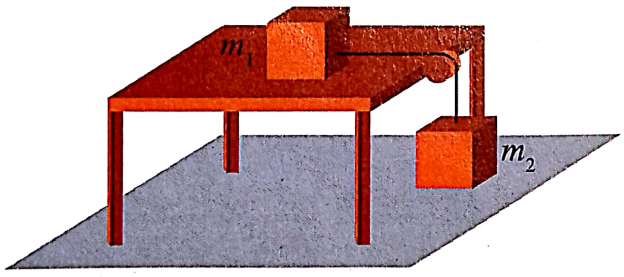
b) Determine el trabajo neto.

6.7 Un bloque de masa $m = 10.0\ [kg]$ asciende sobre un plano inclinado cuyo coeficiente de rozamiento cinético es de $\mu_k = 0.30$.



Determine el trabajo neto del bloque cuando se desplaza verticalmente una distancia de $5.0\ [m]$, sabiendo que parte con una rapidez de $1.0\ [m/s]$ y llega con una rapidez de $3.0\ [m/s]$.

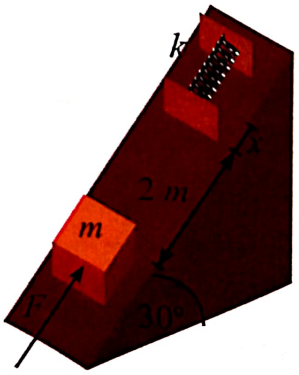
6.8 El siguiente sistema está formado por dos bloques, uno de los cuales de masa $m_1 = 10.0\ [kg]$ se encuentra sobre una plataforma horizontal lisa y atado con el segundo bloque de masa $m_2 = 2.0\ [kg]$ por medio de una cuerda y una polea de masas despreciables.



Si el sistema se suelta desde el reposo, determine la rapidez de cada bloque cuando el bloque de masa m_2 se desplaza $3.0\ m/s$.

6.9 El sistema masa resorte se mantiene en reposo tal como se muestra en la figura. Si se le aplica una fuerza externa hacia arriba de F=10.0 $[N]$ paralela al plano inclinado, durante todo el movimiento.

Determine la máxima compresión del resorte (x) sabiendo que la masa del objeto es m=1.0 $[kg]$, el plano tiene un coeficiente de rozamiento cinético de μ_k = 0.50, el resorte tiene una constante de k =100 $[N/m]$ y al inicio el resorte no está deformado.



PROBLEMAS PROPUESTOS

Nombre: .....

Paralelo: .....

6.10 Un objeto de 4.0 kg es lanzado verticalmente hacia arriba y cuando llega a su altura máxima su energía mecánica es 200 $[J]$. Determine la velocidad con la que fue lanzado el objeto desde el piso.

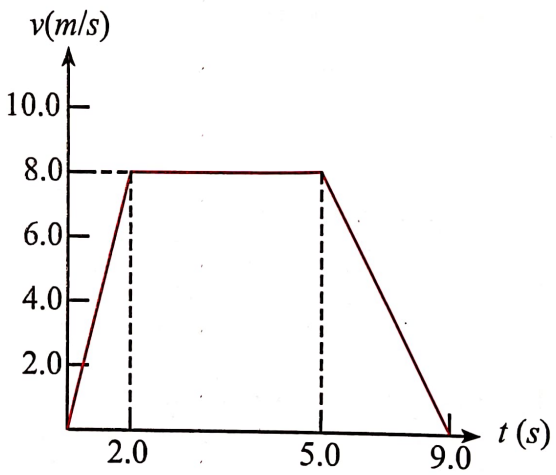
Nota: Considere que el nivel de referencia se encuentra en el suelo.

6.11 Un objeto se lanza desde la terraza de un edificio con una energía mecánica de 450 $[J]$. Sabiendo que la energía potencial del objeto al pasar por un punto ubicado a 20.0 $[m]$ por debajo del punto de partida es - 200 $[J]$. Determine la velocidad con la que fue lanzado el objeto, la altura máxima del objeto y la velocidad con la que pasa por el punto ubicado bajo los 20.0 $[m]$.

6.12 Sobre un objeto actúan las siguientes fuerzas:
$\vec{F}_1=(2\hat{\imath} - 3\hat{\jmath} + 3\hat{k})$ $[N]$, $\vec{F}_2=(-1\hat{\imath} - 2\hat{\jmath} + 4\hat{k})$ $[N]$ y $\vec{F}_3=(-\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k})$ $[N]$.
Determine el trabajo de cada una de las fuerzas y el trabajo neto para desplazar al objeto del punto $(2, -3, 4)$ $[m]$ al punto $(6, -8, -5)$ $[m]$.

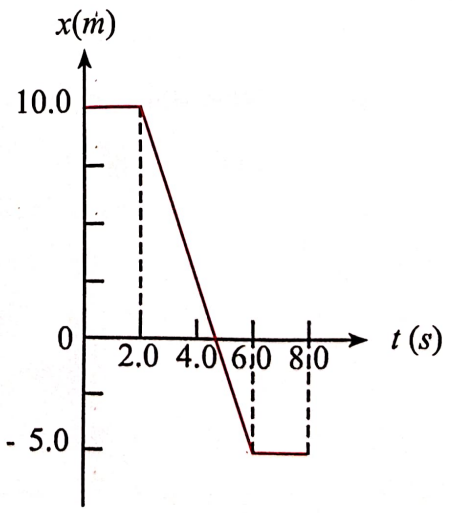
6.13 Una fuerza F=10.0 $[N]$ actúa en dirección del desplazamiento sobre un bloque de masa m = 2.00 $[kg]$ que se mueve en línea recta sobre una superficie rugosa.

En la figura se muestra una gráfica velocidad versus tiempo. Determinar el trabajo realizado por la fuerza F durante todo el recorrido.

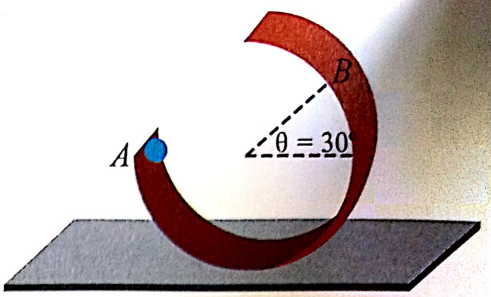


6.14 Una fuerza F = 10.0 $[N]$ actúa en dirección del desplazamiento sobre un bloque que se mueve en línea recta. En la figura se muestra una gráfica posición versus tiempo.

Determinar el trabajo realizado por la fuerza F durante todo el recorrido.



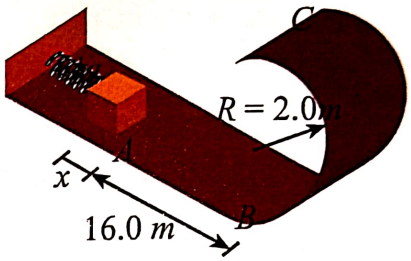
6.15 Determine La rapidez mínima con la que una canica debería lanzarse desde un punto A para alcanzar a desplazarse angularmente un ángulo $\theta = 30^{o}$ hasta un punto B, punto en el cual la canica pierde contacto con la pista parcialmente circular, vertical y lisa de radio 2.0 $[m]$.



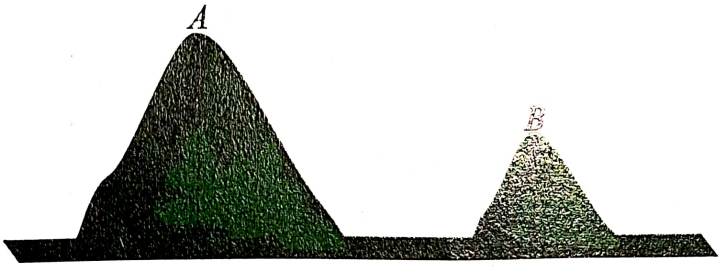
6.16 Determine la mínima compresión x del resorte, para que al soltar el bloque del reposo complete su recorrido (desde el punto A hasta el punto C).

La masa del cuerpo es de 1.0 kg, la constante del resorte es de 500 $[N/m]$, el radio de la trayectoria circular es de 2.0 $[m]$ y desde A hasta B hay 16.0 m de longitud con un coeficiente de fricción cinético de 0.20.

C es el punto mas alto en su trayectoria circular



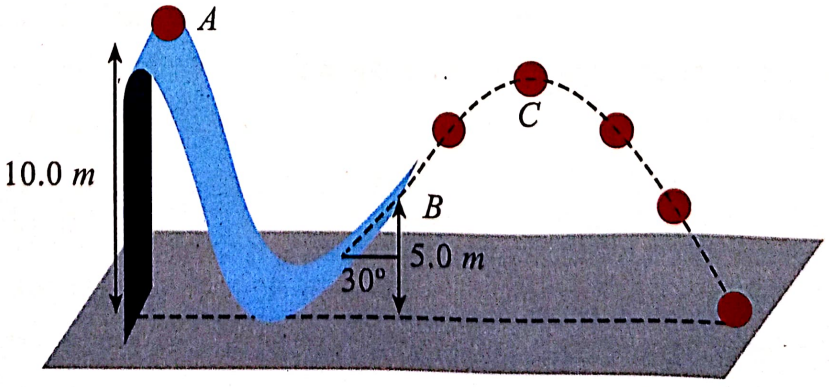
6.17 Un cuerpo logra pasar con una velocidad de 8.0 m/s sin problemas por un punto B que se encuentra en un pista sin fricción. Si el cuerpo pasa por el punto A con una rapidez de 2.0 $[m/s]$. ¿Cuál debe ser la altura h medida desde el suelo que debe tener la pista?



6.18 Una pelota se la deja caer desde un punto A sobre una superficie lisa tal como se muestra en la figura. Si en un punto B se termina la pista y la parte final de la misma forma un ángulo de 30^{0} con la horizontal, luego de ser despedida la pelota de la pista. Se pide:

a) Determinar la magnitud de la velocidad de la pelota en el punto B.

b) Determinar la magnitud de la velocidad de la pelota con la que impacta en el piso.



RESPUESTAS POR CAPÍTULO

FÍSICA
TEORÍA&PROBLEMAS

FÍSICA

TEORÍA&PROBLEMAS

1 | SISTEMA DE UNIDADES

1.1. d;1.2. d; 1.3. c; 1.4. d; 1.5. c; 1.6. c; 1.7. d; 1.8. d; 1.9. c; 1.10. a; 1.11. a; 1.12. b; 1.13. a; 1.14. 2.88 lb, 1307g; 1.15. a; 1.16. c; 1.17. b; 1.18. b; 1.19. Ordenar las siguientes cantidades físicas de menor a mayor y completa la tabla adjunta. *mm*, *cm*, *dm*, *m*, *dam*, *hm*, *km*

$10^{-3}\,m$	$10^{-2}\,m$	$10^{-1}\,m$	$10^{0}\,m$	$10^{+1}\,m$	$10^{+2}\,m$	$10^{+3}\,m$
mm	*cm*	*dm*	*m*	*dam*	*hm*	*km*

1.20. a) 2.04 *m*, b) 2.07 *s*; 1.21. a) 1.02 *m*, b) 4.00 *lb*; 1.22. a) 1.10 *m*, b) 4.08 *lb*; 1.23. a) 3.11 *kg*, b) 2.15 *s*, c) 15.21 *m*, d) 5.01 *N*; 1.24. a; 1.25. a; 1.26. 16*m*, 7*m*, $2\times10^{1}\ m^2$; 27. a) 2, b) 2, c) 2 o 3, d) 6; 28. c; 29. a; 30. b; 31. 3, 3, 4, 2, 2, 6; 32. c; 33. d; 34. b; 35. b

2 | VECTORES

2.1. 705*m*; 56.6° al sur del oeste; 2.2. 360.6*m*; 56.30 al norte del este; 2.3. $T_a = 717.4\ N$; $T_b = 878.6\ N$; 2.4. a) 2418*N*, b) 18° con respecto a F_2 ; 2.5. a) 3464 *m*, b) 0, c) 7464 *m*; 2.6. 10.54 *N*, 348.6°; 2.7. 10 *u*; 200°; 2.8. 80°; 2.9. d; 2.10. 2/3; 2.11. d; 2.12. NO; 2.13. c; 2.14. c; 2.15. $4i - 2k$ ó $-4i+2k$; 2.16. c; 2.17. e; 2.18. b; 2.19. e; 2.20. e; 2.21. d; 2.22. b; 2.23. a; 2.24. a; 2.25. a; 2.26. e; 2.27. d; 2.28. c; 2.29. d; 2.30. $\sqrt{2}$; $5/\sqrt{2}$; 2.31. 164.8°; 2.32. $-2.5i + 28j - 21k$; 2.33. c; 2.34. b; 2.35. $19.2u^2$; 2.36. $-30\ i + 24k$ ó $30\ i - 24k$; 2.37. 56.70; 2.38. $39.6u^2$, $\alpha = 65.9°$, $\beta = 35.3°$, $\gamma = 65.9°$; 2.39. $30i - 12j - 21k$; 2.40. 42.2°; $\alpha = 21.4°$, $\beta = 94.1°$, $\gamma = 69.0°$; 2.41. $4.16i - 5.64j + 3.86k$; 2.42. 26.6°; 2.43. 7.66 *u*; 2.44. $-3.87i - 3.27j + 8.63k$; 2.45 59.7*u*

3 | CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

3.1. Las dos piedras llegan con la misma rapidez; 3.2. Negativa; 3.3. Negativa; 3.4. $-g$; 3.5. Igual a $-g$; 3.6. Alcanzan igual altura; 3.7. Es negativa; 3.8. Negativa; 3.9. 500 *m*; 3.10. 14 *km*; 3.11. 1.5 *s*; 3.12. 200 *m*; 3.13. 200 *m*; 3.14. 120 *km*; 3.15. 14.1 *s*; 3.16. a) 6.0 m/s^2, b) 27 *m*; 3.17. a) 16.77*s*, b) 58.68 *m*; 3.18. $a = -800\ m/s^2$; 3.19. $v_m = +2.8\ m/s$; 3.20. 240 *m*; 3.21. 10 *s*; 3.22. a) 180 *m*, b) 198 *m*, c) +9*m/s*, d) 9.9 *m/s*; 3.23. $v = -38\ m/s$; 3.24. (c); 3.25. (c); 3.26. 10 *s*; 3.27. (a); 3.28. 5 *m/s*; 3.29. (b); 3.30. (d); 3.31. $v = -30\ m/s$; 3.32. $\Delta x = 0m$, $d = 50\ m$

4 | CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

4.1. d) 2.89 *m/s*; 4.2. d) 10.0 *m/s*; 4.3. b) 15 *m*; 4.4. (b); 4.5. 190 *m*; 4.6. 11.2 *m/s*; 4.7. (c); 4.8. (a); 4.9. 34.64 *m/s*; 4.10. (c); 4.11. 25.00 *m/s*; 4.12. d) 5.00 *s*; 4.13. a) No sufre daño alguno porque su rapidez de impacto es 67*m/s*, b) 200 *m*; 4.14. a) No, b) 613.14 *m*; 4.15. a) 14.1 *s*, b) 163.6 *m/s*; 4.16. a) 16.6 *m/s*, b) 1.66 *s*; 4.17. a) 20 *m/s*, 30°, b) 34.6 *m*; 4.18. a) La segunda canica, b) 1/4, c) $\theta = 6.25°$, d) La segunda canica, e) 0.75, f) 25.7°; 4.19. 76.0°; 4.20. a) 30 *Hz*, b) 60π *rad/s*, c) 600π *rad*, d) $360\pi^2\ m/s^2$; 4.21. a) 2 rad/s^2, b) 100 *rads*, c) 3*m/s*, d) 60 m/s^2, e) 0.3 m/s^2; 4.22. 23.80 *m/s*; $\theta = 53.540$ al Norte del Este; 4.23. c)

5 | DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

5.1. $a = 5.0\ m/s^2$; **5.2.** $a = 2.5\ m/s^2$; **5.3.** $F = 40\ N$; **5.4.** $a = 6.0\ m/s^2$ $T = 12\ N$; **5.5.** $a = 15\ m/s^2$; **5.6.** $F_c = 40.0\ N$, $a = 4.00\ m/s^2$; **5.7.** $F_c = 60.0\ N$, $a = 4.00\ m/s^2$; **5.8.** $F = 50\ N$; **5.9.** $T = 120\ N$; **5.10.** $a = 5.00\ m/s^2$; **5.11.** 5 personas; **5.12.** $75\ N$; **5.13.** $F = 50\ N$, $\theta = 233°$; **5.14.** $a = 2.00\ m/s^2$; **5.15.** $a = g\tan\theta$; **5.16.** $N = 12.7\ N$, $a = 8.00\ m/s^2$; **5.17.** $F = 75\ N$; **5.18.** $100\ N$; **5.19.** $F = 22\ N$; **5.20** (c); **5.21.** $a_c = 4.0\ m/s^2$; **5.22.** $T = 4.0N$; **5.23.** $v = (gLsen\theta.tan\theta)^{0.5}$; **5.24.** $T = 20N$; **5.25.** $\mu_s = 0.45$; **5.26.** $\tan\theta = v^2/gR = 0.45$; **5.27.** $v = 20\ m/s$; **5.28.** $v = 21m/s$; **5.29.** $r = 40m$; **5.30.** $v_B = 8.0\ m/s$; **5.31.** $a_c = (4\pi^2\ R)/T^{\ 2}$; **5.32.** (a); **5.33.** $v = 300\ m/s$; **5.34.** $v = 10\ m/s$, $T = 25N$, No se rompe; **5.35.** $T_{arriba} = m(v_{arr}^2 / R - g)$, $T_{aba} = m((v_{aba}^2) / R + g)$; **5.36.** $a = 6.0\times10^{-3}\ m/s^2$; **5.37** $a = 20\ m/s^2$; **5.38** (c); **5.39** (a); **5.40** (d); **5.41** (b); **5.42** (c); **5.43.** $60\ N$

6 | TRABAJO, ENERGÍA Y POTENCIA

6.1. $3.2\times10^2\ J$; **6.2.** $2.5\times10^2\ J$; **6.3.** 1/9; **6.4.** $0\ J$; **6.5.** $54\ J$; **6.6.** a) $3.00\times10^3\ J$, $-750\ J$, b) $2.25\times10^3\ J$; **6.7.** $40\ J$; **6.8.** $3.2\ m/s$; **6.9.** $0.171\ m$; **6.10.** $10\ m/s$; **6.11.** $30\ m/s$, $45\ m$ y $36\ m/s$; **6.12.** $-4\ J$, $-30\ J$, $-17\ J$ y $-51\ J$; **6.13.** $480\ J$; **6.14.** $-150\ J$; **6.15.** $\sqrt{30}\ m/s$; **6.16.** $0.57\ m$; **6.17.** $8.0\ m$; **6.18.** $10\ m/s$; $10\sqrt{2}\ m/s$

VII EDICIÓN

FÍSICA

TEORÍA&PROBLEMAS